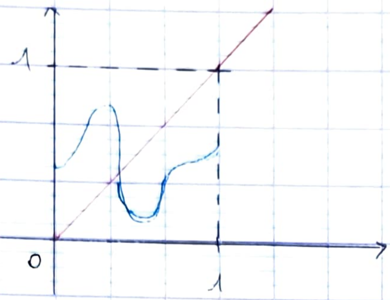
donc f est continue pour tout entier n

Exercice 8

1. a) $f : [0,1] \to [0,1]$



Mq f continue $\Rightarrow$ f admet un point fixe

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$

On a : $\begin{cases} g(1) \in [-1,0] \\ g(0) \in [0,1] \end{cases}$ donc $g : [0,1] \to [-1,1]$

Comme g est continue (par somme de fonctions continues) on a :

Le point important est : $g(0) \geq 0 \geq g(1)$

$-1 \leq g(x) \leq 1$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [0,1] \,/\, g(c) = 0$

i.e $f(c) - c = 0$

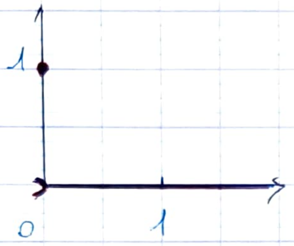
donc $f(c) = c$

donc f admet un point fixe

b) Contre-exemple : continuité

On considère $h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

elle respecte alors les conditions de f mais sans continuité donc l'hypothèse est nécessaire ✓ et n'admet pas de point fixe.



* <u>Contre-exemple:</u> $f([0,1]) \not\subset [0,1]$

On considère $k \begin{cases} [0,1] \to [2,3] \\ x \mapsto x+2 \end{cases}$ ✓, on ne peut pas avoir $f(x) = x$

2. Soient $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x < y$ deux points fixes, quitte à les intervertir
On ~~a alors~~ peut supposer $x < y$
En appliquant f : $f(x) > f(y)$ car f est décroissante
Comme x et y sont deux points fixes on a $f(x) = x$
et $f(y) = y$
donc $x > y$: ABSURDE ✓

Donc il y a un unique point fixe ✓.