Imane
Charlotte

donc f l'est aussi, en tant que composée de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 3 :

Étudions la continuité de l'application :

$$f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ on le sait et regardons si elle l'est aussi sur $\mathbb{Z}$. Étudions alors la limite pour :

1. $x \longrightarrow k^+$

et 2. $x \longrightarrow k^-$ avec $k \in \mathbb{Z}$

1. pour $x \to k^+$:

$$f(x) \xrightarrow[x \to k^+]{} \underbrace{k + (k-k)^2}_{= k \,=\, f(k)}$$

2. pour $x \to k^-$:

$$f(x) \xrightarrow[x \to k^-]{} \underbrace{(k-1) + (k-(k-1))^2}_{= k \,=\, f(k)}$$ ✓

On a alors $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = \lim\limits_{x \to k^+} f(x)$ ✓

ainsi f est continue ~~sur $\mathbb{Z}$~~ et donc $\mathbb{R}$ ✓.

en chaque entier

Exercice 2 : 2)

On cherche la limite de l'application :

$$x \longmapsto x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor$$ lorsque x tend vers 0

et x tend vers l'infini

D'après le cours, on sait que :

$$\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$$ ✓

ie $$\frac{1-x}{x} < \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$$ $\times x$ $(x > 0)$

$$1-x < x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor < 1$$ ✓

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to 0} x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor = 1$$ ✓

Rmq : pour $x < 0$, en adapte le raisonnement et toujours par le théorème des gendarmes, on retrouve le même résultat. ✓

On pose $X = \frac{1}{x}$, on a donc :

$$x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor = \frac{1}{X}\lfloor X \rfloor$$

Or au voisinage de 0, $\lfloor X \rfloor = 0$

donc $\frac{1}{X}\lfloor X \rfloor = 0$

donc $$\lim_{x \to +\infty} x\lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor = 0$$ ✓

Rem : $\forall x > 1$ on a $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$ vu que $0 < \frac{1}{x} < 1$

et donc $f(x) = 0$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.