Olivier PEDRE

Ruben Lebreton

Georges RANDRIANASOLO

Raphaël PIVETEAU (élève en immersion)

Ex 11 : Suite définie implicitement

Prouver que l'équation $x^n = nx - 1$ admet une unique solution x_n sur $[0, 1]$ pour $n > 1$.
Puis déterminer la limite de (x_n).

Idée : On pose f_n une fonction, que l'on souhaite étudier.

Soit $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$.

Nous pouvons dire que f_n est continue car c'est ~~une somme~~ un ~~de~~ pôlynomes.

- On étudie ses variations, pour cela on la dérive :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n'(x) = n x^{n-1} - n \geq 0$$

$$n x^{n-1} \geq n \iff$$

$$x^{n-1} \geq 1 \iff \text{car } n > 1$$

x	0		1
f_n'		$-$	

donc f_n' est positif lorsque $x^{n-1} \geq 1$. (avant 1 il est négatif)

Donc f_n est donc décroissante sur $[0, 1]$.

- But : pour trouver x_n, il faut chercher lorsque f_n change de signe pour ensuite utiliser le T.V.I (de plus comme f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ cela veut dire qu'il existe une unique solution).

On cherche donc les x pour lequel f_n change de signe :

pour $x = 0$: $f_n(0) = 1 > 0$ et pour $x = 1$: $f_n(1) = 2 - n \leq 0$ ✓

donc d'après le T. V. I, puisque f est continue sur $[0,1]$ (un intervalle) et que 0 est compris entre $f_n(0)$ et $f_n(1)$ ✓
alors $\exists !\, x_n \in [0,1] \,/\, f_n(x_n) = 0$. ($x_n$ est unique car f_n est strictement décroissante)

De plus, $f_2(\underline{1}) = 0$ alors $x_2 = \underline{1}$. ✓

Maintenant, cherchons la limite de (x_n),

Tout d'abord, $\forall x \in [0,1]$ $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - (n+1)x + 1 - x^n + nx - 1$

$$= \underbrace{x^{n+1} - x^n}_{<0} \underbrace{- x}_{<0} < 0$$

car $x \in [0,1]$

Donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

Donc pour $x_{n+1} \in [0,1]$:

$$f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) < f_n(x_{n+1})$$

donc $f_n(x_n) < f_n(x_{n+1})$

or f_n est décroissante sur $[0,1]$ donc

$$\boxed{x_n > x_{n+1}}$$

Donc (x_n) est bornée $[0,1]$ et est décroissante, ✓

d'après le théorème de convergeance montone, (x_n) converge. ✓

De plus, $\underbrace{\lim_{n \to +\infty} x_n = 0}$, donc (x_n) converge vers 0.

~~Prouver d'abord~~ ~~f_n~~ [illegible]

car $0 < x_n < 1$

~~donc~~ $0 < x_n^n < 1$

donc ~~$\Leftrightarrow$~~ $0 < n x_n - 1 < 1$

donc $\Leftrightarrow$ $1 < n x_n < 2$

donc $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{n} < x_n < \frac{2}{n}$ → d'après le théorème des gendarmes