Rivat
Gabriel

Cecher Maxime

TD 16 : Limites et continuité

Exercice 1 :

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrons que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.

Preuve : comme f est périodique, $\exists T > 0 \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$ ✓

Supposons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Prenons un $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On a par définition de la périodicité :
conséquence

$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x+nT) = f(x)$ ✓

Or quand x tend vers $+\infty$, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+nT) = +\infty$ ✓

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x+nT) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ✓

Vu que $f(x+nT) = f(x)$ pour tout n on obtient $f(x) = l \in \mathbb{R}$ et ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est constante ✓ ☒

- En déduire que sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

Preuve : on sait que sin est périodique mais elle n'est pas constante. Donc par contraposée, sin n'admet pas de limite en $+\infty$. ☒ ✓