Mahé PALAMA
Mattéo SALEM
Noé OUNE-BINE

CORRECTION TD 16

exercice 5

1) $f : x \to \frac{|x|}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$

- si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ ✓

- si $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $f(x) = \frac{|x|}{x} = -\frac{x}{x} = -1$ donc $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ ✓

comme $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ donc f n'est pas prolongeable par continuité ✓

2) $f : x \to \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2 - 2x - 3}$

$\Delta = 4 + 12 = 16$ ✓

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = -1$ ou 3

$\frac{1}{x-3} - \frac{4}{(x-3)(x+1)}$ ✓

$= \frac{x+1-4}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ ✓

$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$

comme $\lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x)$ donc f n'est pas prolongeable par continuité.

Pas prolongeable en -1, mais prolongeable en 3 vu que $\lim_{x \to 3^\pm} f(x) = \frac{1}{4}$.

3) $f : x \to \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ ✓

par composition de la limite $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

et $\lim_{x \to 0^-} x = 0$ donc $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ ✓

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

donc par composition de la limite $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ ✓

donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ ✓

ainsi $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ /

le prolongement par continuité de f est

$$g \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$ ✓

4) $f : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$

$$\frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = \frac{\frac{\sin(nx)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}$$ or $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ✓

donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(nx)}{x} = \lim_{x \to 0} n \times \frac{\sin(nx)}{nx}$ ✓

on pose $nx := X$

$\lim_{X \to 0} n \times \frac{\sin(X)}{X} = n \times 1$ ✓

donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = n$ ✓

de plus $\forall N \in \mathbb{N}$

$$f(x + N\pi) = \frac{\sin(n(x + N\pi))}{\sin(x + N\pi)} = \frac{\sin(nx) \times (-1)^{nN}}{(-1)^N \times \sin(x)}$$ ✓

la limite en $x + N\pi$ dépend de la parité de nN

si nN est pair

$f(x + N\pi) = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$ donc $\lim_{x \to 0} f(x + N\pi) = n$ ✓

si nN impair

$f(x + N\pi) = -\dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x + N\pi) = -n$