Matrices d'applications linéaires et intégration

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Matrice inverse

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et de base $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $f\in\mathscr{L}(E)$.
f est un automorphisme de E si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible soit

$$f\in GL(E)\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\in GL_n(\mathbb{K})$$

De plus, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

Proposition 2 Formule de changement de bases pour un endomorphisme

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ avec E $\mathbb{K}$-ev de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On pose $A=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A'=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors,

$$A=PA'P^{-1}\quad\text{avec}\quad P=P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Proposition 3 Formule de changement de bases pour un vecteur

Soit $x\in E$. On pose X et X' sa matrice respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E. Alors,

$$X=PX'\quad\text{avec}\quad P=P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Proposition 4 Caractérisation des matrices de rang r

Soit $M\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$\operatorname{rg}(M)=r\iff\exists(P,Q)\in GL_n(\mathbb{K})\times GL_p(\mathbb{K}),\ M=PJ_rQ$

Proposition 5 Caractérisation de la similitude des matrices

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n (chacune dans une certaine base).

Définition 1 Trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n>1$ et $f\in\mathscr{L}(E)$.
On appelle trace de f, notée $\operatorname{tr}(f)$, est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E. Elle est bien définie car elle est indépendante de la base choisie (à savoir démontrer)

Proposition 6 Trace d'un projecteur

Si p est un projecteur de E alors $\operatorname{tr}(p)=\operatorname{rg}(p)$.

Proposition 7 Caractérisation du rang par les matrices extraites

Soit $A\in\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Alors le rang de A est la dimension de la plus grande matrice carrée inversible extraite de A.

Proposition 8 Caractérisation de la similitude des matrices

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n (chacune dans une certaine base).

Proposition 9 Opérations élémentaires

Connaître les opérations élémentaires "autorisées" et montrer qu'elles correspondent à multiplier par une matrice (dont il faut connaître l'expression) à gauche pour les lignes (resp. à droite pour les colonnes). (démonstration par le calcul du produit uniquement pour les opérations sur les lignes).

Proposition 10 Proposition

Les opérations élémentaires sur les colonnes (respectivement lignes) conservent l'image (respectivement le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

Proposition 11 Ensemble des solutions d'une équation linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$ alors l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = b, \text{ est}$$

- Soit l'ensemble vide
- Soit un sous-espace affine de E de la forme $x_p + \ker(f)$ où x_p est une solution particulière de l'équation.

Proposition 12

Rappeler la définition d'uniforme continuité. Démontrer que si f est lipschitzienne alors elle est uniformément continue.
Énoncer le théorème de Heine puis donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue.

Proposition 13 Lemme

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ_ε et ψ_ε sur $[a,b]$ telle que

$$\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \varepsilon$$

Définition 2 Donner la définition et montrer que les deux valeurs sont égales : on utilisera le lemme 1

Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a,b])$.
On pose $I_-(f) = \sup\left\{ \int_a^b \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f \right\}$ et $I_+(f) = \inf\left\{ \int_a^b \psi \,\middle|\, \psi \in \mathscr{E}([a,b]), f \leqslant \psi \right\}$.
Ces deux valeurs sont finies et égales ; leur valeur commune est appelée intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$.

À savoir faire

- ☐ Montrer que deux matrices sont semblables, ou au contraire ne le sont pas (dans ce cas, penser à utiliser les invariants de similitude)

- ☐ Savoir utiliser les formules de changement de base pour trouver la matrice dans la base canonique d'une application dont la matrice est simple dans une autre base (par exemple : projecteur ou symétrie)
- ☐ Donner la matrice d'une application linéaire de E vers F dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
- ☐ Calculer la trace d'un endomorphisme
- ☐ Appliquer la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice.
- ☐ Appliquer la méthode du pivot de Gauss pour déterminer si une matrice est inversible, pour l'inverser lorsque cela est possible.
- ☐ Déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire à l'aide d'une résolution de système linéaire

Ce qu'en dit le programme

A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1,i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a+ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
c) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

B - Changements de bases, équivalence et similitude

Contenus	Capacités & commentaires
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.	Notation $\mathrm{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.