Dimension et variables aléatoires

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Propriétés

Soient X et Y deux v.a.r. définies sur Ω.
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(a) = a$.
- **Linéarité** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.
- **Positivité** : Si $X \geqslant 0$ alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.
- **Croissance** : Si $X \leqslant Y$ alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.

Proposition 2 Formule de König-Huygens

Soit X une v.a.r. définie sur Ω. Alors
$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$
et
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Proposition 3 Formule de transfert

Soit X une v.a.r. définie sur Ω et $f : X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \to \mathbb{R}$, alors
$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathrm{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathrm{P}(X = x_i)$$

Proposition 4 Variance et covariance après transformation affine

Soit X une v.a.r. définie sur Ω.
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$$
et
$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ \mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Proposition 5 Inégalité de Markov

Soit X une v.a.r. telle que $X \geqslant 0$. Alors
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{E}(X)$$

Proposition 6 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. définie sur Ω alors
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{V}(X)$$

Proposition 7 Conséquence de l'indépendance

Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ alors pour toute partie A et B de $\mathbb{R}$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants et on a

$$\mathrm{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathrm{P}(X \in A)\mathrm{P}(Y \in B)$$

De plus, on a $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. (pour toutes fonctions f et g)

Proposition 8 Conséquence de l'indépendance mutuelle

Si $X_1, \dots X_n$ sont des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** (définition qu'on rappellera) sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ alors pour tout $A_1 \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)), \dots, A_n \in \mathscr{P}(X_n(\Omega))$, on a

$$\mathrm{P}((X_1 \in A_1) \cap \dots \cap (X_n \in A_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \in A_i)$$

Proposition 9 Espérance d'une fonction composée avec un couple aléatoire

Soient X et Y deux v.a.r. sur Ω et g une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ alors

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} g(x,y)\mathrm{P}((X=x) \cap (Y=y))$$

Proposition 10 Variance d'une somme de v.a.r

Soit $X_1, \dots X_n$ sont des variables aléatoires définies sur Ω alors

- $\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
- Si les variables sont deux-à-deux indépendantes alors $\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i)$.

Exercice 1 Pile ou face

On lance 1000 fois une pièce équilibrée et on note S le nombre de fois où l'on a obtenu "pile"

1. Calculer $\mathrm{E}(S)$
2. Calculer $V(S)$
3. Minorer $\mathbb{P}(S \in [\![400, 600]\!])$

Proposition 11 Interprétation matricielle de l'égalité $y = f(x)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ où E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de bases $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Proposition 12 Correspondance matrice - application linéaire

Soit E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de bases $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

L'application $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array} \right.$ est une bijection.

À savoir faire

- ☐ Tous les exercices du chapitre "dimension finie"
- ☐ Les lois usuelles n'ont pas encore été vues en cours
- ☐ Trouver la loi d'une variable aléatoire réelle dont l'univers image est fini : on détermine dans un premier temps son univers image, puis pour chacune des valeurs x_k potentiellement prises par la v.a.r, on détermine $\mathrm{P}(X = x_k)$: parfois en utilisant la formule des probabilités composées, parfois en utilisant l'équiprobabilité d'une situation
- ☐ Calculer une espérance d'une v.a.r X (avec $X(\Omega)$ fini) dont on connaît la loi, calculer sa variance (aucune loi usuelle n'est à connaître pour l'instant)
- ☐ Calculer la variance d'une v.a.r dont on connaît la loi. Utiliser le fait que la variance d'une somme de v.a.r indépendantes est la somme des variances.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	~~Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.~~
~~Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.~~	~~Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.~~
~~Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.~~	~~Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.~~
~~Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.~~	~~Notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.~~
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants - déjà vu dans un chapitre précédent	
f) Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y) = (x,y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
~~Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.~~	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
~~Lemme des coalitions : si les variables aléatoires~~ ~~$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.~~	Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Espérance $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.
c) Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.