Dimension

Résultats et preuves à connaître

Définition 1 Dimension d'un ev

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors

1. E admet une base finie
2. toutes les bases de E admettent le même nombre d'éléments. Ce dernier est appelé **dimension** de E et noté $\dim(E)$ ou s'il y a ambiguïté $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.
   On pose $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Proposition 1 Familles libres - Familles génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des vecteurs de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.
2. $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de E.
3. $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de E.

Exercice 1 Base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$

$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et de base $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leq i\leq j\leq n}$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et de base $(E_{i,j}-E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$

Proposition 2 Dimension d'un produit cartésien et d'une somme directe

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors $\dim(E\times F) = \dim(E)+\dim(F)$.
Soient F et G deux sous-ev de E en somme directe alors $\dim(F\oplus G) = \dim(F)+\dim(G)$
Énoncer les deux résulatst et en démontrer un, au choix de l'interrogateur

Proposition 3 Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G deux sev de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$

Proposition 4 Théorème noyau/image et Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec E de dimension finie et f est une application linéaire de E dans F.

- Si E' un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E, alors $f_{|E'}$ est un isomorphisme de E' dans $\mathrm{Im}\,(f)$.
- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec E de dimension finie. Si f est une application linéaire de E dans F alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\ker(f))+\mathrm{rg}\,(f)$$

Proposition 5 Détermination par l'image d'une base

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev.
Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in F^n$ alors il existe une unique application linéaire f de E dans F qui vérifie

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f(e_i) = y_i$$

Proposition 6 Caractérisation de la notion "être isomorphes"

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
E et F sont isomorphes ssi $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 7 Équivalences de trois propositions

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.
Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est bijective de E dans F.
2. f est injective sur E.
3. f est surjective de E dans F.

Proposition 8 Invariance du rang par composition d'isomorphismes

Soient E, F et G $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Si f est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$.
Si g est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

Proposition 9 Caractérisation géométrique des hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On a équivalence entre

1. H est un hyperplan de E.
2. Il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = D \oplus H$.
3. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 10 Noyau commun pour deux formes linéaires

Deux hyperplans d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont égaux ssi leurs équations cartésiennes sont proportionnelles.

À savoir faire

- ☐ Utiliser le théorème du rang, la formule de Grassman
- ☐ Exprimer un sous-ev de $\mathbb{R}^n$ donné à l'aide d'équations, sous forme d'espaces engendré par une famille de vecteurs. En déduire la dimension d'un tel sous-espace (on appliquera la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à un système échelonné, s'il y a plus d'inconnues que d'équations, certaines peuvent "être passées en paramètres")
- ☐ Montrer qu'une famille de vecteurs est liée, ou libre

- ☐ Montrer qu'une famille est génératrice
- ☐ Montrer qu'une famille est une base, s'en servir pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel
- ☐ Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},E)$,...)
- ☐ Reconnaître un sous-espace affine d'un espace vectoriel et donner sa direction (exemple : ensemble des solutions d'un système linéaire, ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire)
- ☐ Savoir montrer qu'une fonction donnée est une application linéaire.
- ☐ Déterminer le noyau/ l'image d'une application linéaire. En déduire si elle est injective/ surjective.
- ☐ Reconnaître un projecteur : on calcule $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut f) f est alors le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(f)$ parallèlement à $\ker(f)$. Idem avec les symétries : calculer $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut Id) et $\ker(f - \mathrm{Id})$ ainsi que $\ker(f + Id)$

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Applications linéaires : a) Généralités	
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $Imu =$ vect $(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}\,(u)$.
Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}\,(u), \mathrm{rg}\,(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $u_{\|E_i} = u_i$ pour tout i.	