TD 13 : Calcul matriciel

Calcul matriciel élémentaire

Ex 1 Dans chacun des cas calculer, lorsque c'est possible, $A+B, 2A, AB$ et BA. Lorsque le calcul n'est pas possible indiquer précisément la cause.

(a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. (d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ex 2 On considère G l'ensemble des matrices défini par :

$$G=\left\{ A(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle| (\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que G est un groupe multiplicatif. Calculer $A(\theta,\varphi)A(\theta',\varphi')$. Montrer que G est un sous groupe de $(Gl_4(\mathbb{R}),\times)$

Ex 3 On considère Γ l'ensemble des matrices dites circulantes défini par :

$$\Gamma=\left\{ M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que Γ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.Déterminer deux matrices J et K telles que toutes les matrices de Γ puissent être écrites sous la forme $aI_3+bJ+cK$, et calculer les différents produits (JK, J^2, K^2, KJ). Cela aidera à montrer que Γ est stable par produit.
2. L'anneau est-il commutatif, intègre? Est-ce un corps?

Ex 4 Soit $A\in\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices $S=AA^T$ et $S'=A^TA$ sont des matrices symétriques carrées.
Montrer que $\operatorname{tr}(S)=0 \Longleftrightarrow A=O_{np}$. Défition de matrice symétrique : matrice égale à sa propre transposée

Ex 5 Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
Calculer $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Puissances de matrice

Ex 6 Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ de :

(a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $C=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (c)$D=\begin{pmatrix} \cos\theta & -2\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{2} & \cos\theta \end{pmatrix}$

Mettre A sous la forme $3I_3+N$ et déterminer les puissances de N. Utiliser la formule du binôme (en justifiant qu'elle peut s'appliquer dans ce cas-là !)
Calculer $B^2; B^3$ puis conjecturer un résultat qu'on prouvera par récurrence
$C=3I+B$, et la formule du Binôme de peut s'appliquer (on expliquera pourquoi)
D : calculer $D^2; D^3$ puis conjecturer un résultat qu'on prouvera par récurrence

Ex 7 **Suites récurrentes linéaires couplées**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = A - I_2$ puis en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
   On trouve ensuite $A^3 = -I_2$, puis on exprime $A^4; A^5; A^6 \dots$ en fonction de A et I_2, puis on s'aperçoit que la suite des puissances et périodique !

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes u_1 et v_1 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n \end{cases}$$

   Calculer u_n et v_n en fonction de n, u_1 et v_1. Poser $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et montrer que $X_n = A^n X_0$

Calcul d'inverse

Ex 8 **Polynôme annulateur**

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ qui vérifie $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = 0_3$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
On peut se servir par exemple de l'égalité $A\left(A^2 - 4A + 5I_3\right) = 2I_3$

Ex 9 Soit $n \geqslant 2$ et $\omega \in \mathbb{U}_n$, $\omega \neq 1$. On pose $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.
Calculer $A\overline{A}$, en déduire que A est inversible et expliciter A^{-1}.
Utiliser la formule qui donne la valeur des coefficients d'une matrice produit à l'aide d'une somme.

Ex 10 Déterminer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x) & \operatorname{sh}(x) \\ \operatorname{sh}(x) & \operatorname{ch}(x) \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) et b) utiliser le déterminant. Pour c) et d), multiplier à droite par $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et résoudre le système $CM = I_3$ ou $DM = I_3$