

DEVOIR DE MATHEMATIQUES n°1Calcul de cosinus par radicaux

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer :

$$\cos \frac{\pi}{5} \quad \text{et} \quad \cos \frac{\pi}{17}$$

à l'aide de combinaisons finies de racines carrées.

Partie I : Calcul de $\cos \frac{\pi}{5}$.

Soit l'équation $(E) : z^5 - 1 = 0$.

1. Donner les cinq racines de (E) sous forme trigonométrique.

2. On va maintenant résoudre (E) à l'aide de racines carrées.

(a) Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^5 - 1 = (z - 1)Q(z)$$

(b) Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + b \left(z + \frac{1}{z} \right) + c$$

(c) Résoudre, en exprimant les solutions à l'aide de racines carrées, l'équation :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

(d) Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en exprimant les solutions à l'aide de racines carrées, éventuellement superposées.

3. Des questions précédentes, déduire des expressions à l'aide de racines carrées de :

$$\cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{4\pi}{5} \text{ et } \sin \frac{\pi}{5}$$

Partie II : Calcul de $\cos \frac{\pi}{17}$.

1. On désigne par a et h deux réels et par n un entier naturel non nul. On pose :

$$C(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh) \quad \text{et} \quad S(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh)$$

(a) On suppose $\sin \frac{h}{2} = 0$. Calculer $C(a, h)$ et $S(a, h)$ en fonction de a et n .

(b) On suppose $\sin \frac{h}{2} \neq 0$. Établir les formules

$$C(a, h) = \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right) \cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S(a, h) = \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right) \sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

2. Dans cette question, et les suivantes, θ désigne le réel $\frac{\pi}{17}$. On pose :

$$x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$

(a) Montrer que $x_1 > 0$.

(b) Montrer que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ en s'aidant du résultat de la question II.1.b.

(c) Calculer le produit $x_1 x_2$. On devra pour cela :

i) développer le produit des deux sommes x_1 et x_2 .

ii) appliquer au résultat obtenu la formule linéarisant le produit $\cos(a) \cos(b)$

iii) en conclure $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$.

(d) Dédurre de ce qui précède des expressions de x_1 et x_2 à l'aide de racines carrées.

3. On pose ici :

$$y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$$

$$y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta)$$

$$y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$$

(a) Calculer en s'inspirant de la question précédente les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.

(b) En déduire les expressions de y_1, y_2, y_3 , et y_4 à l'aide de racines carrées, éventuellement superposées.

4. Calculer $\cos(\theta) \cos(13\theta)$ et décrire une méthode qui permette d'exprimer $\cos(\theta)$ à l'aide de racines carrées. Après résolution, non demandée, on obtient :

$$\cos \frac{\pi}{17} = \frac{1}{16} \left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}} \right)$$

Cette méthode fut élaborée en 1796 par Johann Carl Friedrich Gauss alors âgé de 19 ans seulement !