

Correction du DM n°1

Calcul de cosinus par radicaux

Partie I : Calcul de $\cos \frac{\pi}{5}$.

1. $z^5 = 1 \iff z = e^{i\frac{2ik\pi}{5}}$ avec $k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket$.

2. (a) $z^5 - 1 = (z-1)(-z^4 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + 1) = z^5 + (a-1)z^4 + (b-a)z^3 + (c-b)z^2 + (1-c)z - 1$

$$\iff \begin{cases} a-1=0 \\ b-a=0 \\ c-b=0 \\ 1-c=0 \end{cases} \iff a=b=c=1.$$

On pose donc $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

(b) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{Q(z)}{z^2} = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$.

Or $a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = a\left(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}\right) + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = az^2 + bz + (2a+c) + \frac{b}{z} + \frac{a}{z^2}$

Il suffit donc de prendre $a = b = 1$ et $2a + c = 1$ soit $c = -1$.

(c) $Z^2 + Z - 1 = 0 \iff \Delta = (\sqrt{5})^2$ soit $Z = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $Z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(d) $Q(z) = 0 \iff \frac{Q(z)}{z^2} = 0$ car 0 n'est pas solution de l'équation.

$$\iff \begin{cases} Z = z + \frac{1}{z} \\ Z^2 + Z - 1 = 0 \end{cases} \iff z + \frac{1}{z} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1) \text{ ou } z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

(1) $\iff z^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z + 1 = 0$

$$\iff \Delta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{2\sqrt{5}-10}{4} < 0 \text{ donc } \Delta = \left(i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)^2$$

$$z = -\frac{1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = z_1 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = z_2$$

(2) $\iff z^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z + 1 = 0$

$$\iff \Delta = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = -\frac{2\sqrt{5}+10}{4} < 0 \text{ donc } \Delta = \left(i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right)^2$$

$$z = -\frac{1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = z_3 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = z_4$$

Conclusion : $Q(z) = 0 \iff z \in \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

3. Or $Q(z) = 0 \iff z^5 = 1$ et $z \neq 1$ donc $Q(z) = 0 \iff z \in \{e^{-\frac{4i\pi}{5}}, e^{-\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}\}$.

De plus, $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$ donc $\cos \frac{4\pi}{5} < 0 < \cos \frac{2\pi}{5}$ car cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. $\cos \frac{\pi}{5} =$

$\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos \frac{4\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \sin \frac{4\pi}{5}$.

Or $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin \frac{2\pi}{5} > \sin \frac{4\pi}{5} > 0$ car sin est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Partie II : Calcul de $\cos \frac{\pi}{17}$.

1. (a) Si $\sin \frac{h}{2} = 0$ alors $\frac{h}{2} = m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ soit $h = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$.

$$C(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + 2km\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a) \text{ donc } \boxed{C(a, h) = n \cos(a)}.$$

$$S(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + 2km\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a) \text{ donc } \boxed{S(a, h) = n \sin(a)}.$$

- (b) Si $\sin \frac{h}{2} \neq 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $h \neq 2m\pi$ d'où $e^{ih} \neq 1$

$$C(a, h) + iS(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ih})^k = e^{ia} \frac{1 - e^{inh}}{1 - e^{ih}} \text{ car } e^{ih} \neq 1.$$

soit $C(a, h) + iS(a, h) = e^{ia} \frac{e^{\frac{inh}{2}}}{e^{\frac{ih}{2}}} \frac{e^{-\frac{inh}{2}} - e^{\frac{inh}{2}}}{e^{-\frac{ih}{2}} - e^{\frac{ih}{2}}} = e^{ia + \frac{i(n-1)h}{2}} \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$. On en déduit en prenant la partie réelle et la partie imaginaire que :

$$\boxed{C(a, h) = \frac{\sin \left(\frac{nh}{2}\right) \cos \left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \left(\frac{h}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S(a, h) = \frac{\sin \left(\frac{nh}{2}\right) \sin \left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \left(\frac{h}{2}\right)}}$$

2. (a) $0 < 3\theta < 5\theta < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(3\theta) > 0$ et $\cos(5\theta) > 0$.

$\cos(11\theta) = -\cos(\pi - 11\theta) = -\cos(6\theta)$. Comme $0 < 5\theta < 6\theta < \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\cos(5\theta) > \cos(6\theta)$ soit $\cos(5\theta) - \cos(6\theta) > 0$ d'où $\cos(5\theta) + \cos(11\theta) > 0$.

On obtient finalement $\boxed{x_1 > 0}$.

- (b) $x_1 + x_2 = \sum_{k=0}^7 \cos((2k+1)\theta) = C(\theta, 2\theta)$ avec $n = 8$.

$$\text{On a alors } x_1 + x_2 = \frac{\sin(8\theta) \cos(8\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(16\theta)}{2 \sin(\theta)}.$$

$$\text{Or } \sin(16\theta) = \sin(\pi - 16\theta) = \sin(\theta) \text{ donc } \boxed{x_1 + x_2 = \frac{1}{2}}.$$

- (c) $x_1 x_2 = \cos(3\theta) \cos(\theta) + \cos(3\theta) \cos(9\theta) + \cos(3\theta) \cos(13\theta) + \cos(3\theta) \cos(15\theta) + \cos(5\theta) \cos(\theta) + \cos(5\theta) \cos(9\theta) + \cos(5\theta) \cos(13\theta) + \cos(5\theta) \cos(15\theta) + \cos(7\theta) \cos(\theta) + \cos(7\theta) \cos(9\theta) + \cos(7\theta) \cos(13\theta) + \cos(7\theta) \cos(15\theta) + \cos(11\theta) \cos(\theta) + \cos(11\theta) \cos(9\theta) + \cos(11\theta) \cos(13\theta) + \cos(11\theta) \cos(15\theta)$
 $= \frac{1}{2} (\cos(4\theta) + \cos(2\theta) + \cos(12\theta) + \cos(6\theta) + \cos(16\theta) + \cos(10\theta) + \cos(18\theta) + \cos(12\theta) + \cos(6\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(4\theta) + \cos(18\theta) + \cos(8\theta) + \cos(20\theta) + \cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(6\theta) + \cos(16\theta) + \cos(2\theta) + \cos(20\theta) + \cos(6\theta) + \cos(22\theta) + \cos(8\theta) + \cos(12\theta) + \cos(10\theta) + \cos(20\theta) + \cos(2\theta) + \cos(24\theta) + \cos(2\theta) + \cos(26\theta) + \cos(4\theta))$

Comme $\cos(k\theta) = -\cos(\pi - k\theta) = -\cos((17-k)\theta)$, on obtient

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{2} (4\cos(\theta) + 4\cos(3\theta) + 4\cos(5\theta) + 4\cos(7\theta) + 4\cos(9\theta) + 4\cos(11\theta) + 4\cos(13\theta) + 4\cos(15\theta))$$

$$\text{soit } x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2) \text{ donc } \boxed{x_1 x_2 = -1}.$$

(d) x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - \frac{x}{2} - 1 = 0$.

$$\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 \text{ donc } x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}.$$

$$\text{Or } x_1 > 0 \text{ et } x_1 x_2 < 0 \text{ donc } \boxed{x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}}.$$

3. (a) $y_1 y_2 = (\cos(3\theta) + \cos(5\theta))(\cos(7\theta) + \cos(11\theta))$

$$= \frac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(8\theta) + \cos(12\theta) + \cos(2\theta) + \cos(16\theta) + \cos(6\theta))$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos(7\theta) + \cos(13\theta) + \cos(3\theta) + \cos(9\theta) + \cos(5\theta) + \cos(15\theta) + \cos(\theta) + \cos(11\theta))$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \frac{\sin(16\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\text{donc } \boxed{y_1 y_2 = -\frac{1}{4}}$$

$$y_3 y_4 = (\cos(\theta) + \cos(13\theta))(\cos(9\theta) + \cos(5\theta))$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(16\theta) + \cos(14\theta) + \cos(22\theta) + \cos(4\theta) + \cos(26\theta) + \cos(2\theta))$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos(7\theta) + \cos(11\theta) + \cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(13\theta) + \cos(9\theta) + \cos(15\theta))$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \frac{\sin(16\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\text{donc } \boxed{y_3 y_4 = -\frac{1}{4}}$$

(b) Or $y_1 + y_2 = x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ et $y_3 + y_4 = x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$.

• y_1 et y_2 sont solutions de l'équation $x^2 - \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)x - \frac{1}{4} = 0$.

$$\Delta = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)^2 + 1 = \frac{34 + 2\sqrt{17}}{16} \text{ donc } x = \frac{1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8}.$$

Or $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) > 0$ et $y_1 y_2 < 0$,

$$\text{donc } \boxed{y_1 = \frac{1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8} \text{ et } y_2 = \frac{1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8}}.$$

• y_3 et y_4 sont solutions de l'équation $x^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}\right)x - \frac{1}{4} = 0$.

$$\Delta = \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}\right)^2 + 1 = \frac{34 - 2\sqrt{17}}{16} \text{ donc } x = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}.$$

Or $y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta) = \cos(\theta) - \cos(4\theta) > 0$ et $y_3 y_4 < 0$,

$$\text{donc } \boxed{y_3 = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} \text{ et } y_4 = \frac{1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}}.$$

4. $\cos(\theta) \cos(13\theta) = \frac{1}{2}(\cos(14\theta) + \cos(12\theta)) = -\frac{1}{2}(\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) = -\frac{y_1}{2}$

$$\text{soit } \boxed{\cos(\theta) \cos(13\theta) = -\frac{1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16}}$$

De plus, $\cos(\theta) + \cos(13\theta) = y_3 = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}$ donc $\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$ sont les solutions de l'équation

$$x^2 - \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}x - \frac{1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16} = 0$$

De plus, $\cos(\theta) > 0$ et $\cos(\theta)\cos(13\theta) > 0$ donc $\cos(\theta)$ est la seule solution positive.