

TD 3 : Trigonométrie élémentaire

Relations d'équivalence

Ex 1 Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalence ?

1. \mathbb{R} avec $x \mathcal{R} y$ si et seulement si le point $M(x, y)$ est sur le cercle unité.
2. \mathbb{R} avec $x \mathcal{R} y$ si et seulement si le point $M(x, y)$ est dans le disque unité fermé.
3. \mathbb{C} avec $a \mathcal{R} b$ si et seulement si $|a| = |b|$.
4. Les droites du plan avec $\mathcal{D} \mathcal{R} \mathcal{D}'$ si et seulement si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles entre elles.
5. \mathbb{N}^* avec $a \mathcal{R} b$ si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*, b = a^n$.
6. $\mathcal{P}(E)$ avec $A \mathcal{R} B$ si et seulement si $A = B$ ou $A = \bar{B}$.

Ex 2 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} . Prouver la reflexivité, la symétrie et la transitivité.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément x de \mathbb{R} . Penser à factoriser $x - y$.

Ex 3 Pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $m \mathcal{R} n$ si et seulement si $m + n$ est un entier pair.

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .
2. Déterminer les classes d'équivalence pour cette relation. Il n'y en a que deux.

Trigonométrie

Ex 4 Résoudre dans \mathbb{R} puis $[0, 2\pi]$ les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} (\text{a}) \cos(x) > 0 & (\text{b}) \cos^2(x) > \frac{1}{2} & (\text{c}) -1 < \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2} \\ (\text{d}) -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} & (\text{e}) -\sqrt{3} < \tan(3x) < \frac{1}{\sqrt{3}} & \end{array}$$

Ex 5 Résoudre dans \mathbb{R} les équations trigonométriques suivantes :

$$\begin{array}{ll} (\text{a}) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) & (\text{b}) \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \\ (\text{c}) \tan(3x) = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) & (\text{d}) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Ex 6 Soient a, b et c les mesures des angles géométriques d'un triangle non aplati. Démontrer que

$$\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) = \tan(a)\tan(b)\tan(c)$$

Utiliser le fait que $c = \pi - (a + b)$.

Ex7 Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations trigonométriques suivantes :

(a) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ Mettre sous forme $2\cos(x + \phi)$

(c) $\cos \theta + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) > 0$ dans un premier temps, mettre sous forme $a\cos(\theta + b\sin(\theta))$ puis $A\cos(\theta + \phi)$

Ex8

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. Résoudre l'équation $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$. Utiliser l'amplitude et la phase