

Correction du DS n°1.**durée : 3 heures****Question de cours**On montre par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: voir dans le cours.**Exercice 1**

- $P = \ll \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a \neq b \text{ et } b \neq c \Rightarrow a \neq c) \gg$
non $P = \ll \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a \neq b \text{ et } b \neq c \text{ et } a = c) \gg$
Contraposée de $P = \ll \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a = c \Rightarrow a = b \text{ ou } b = c) \gg$
Réciproque de $P = \ll \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a \neq c \Rightarrow a \neq b \text{ et } b \neq c) \gg$
- $Q = \ll \ln \pi \text{ est rationnel ou } \sqrt{2} \text{ est irrationnel} \gg$
non $Q = \ll \ln \pi \text{ est irrationnel et } \sqrt{2} \text{ est rationnel} \gg$
- $R = \ll \text{Si } 2 = -2 \text{ alors } (-2)^2 = 4 \gg$
non $R = \ll 2 = -2 \text{ et } (-2)^2 \neq 4 \gg$
Contraposée de $R = \ll \text{Si } (-2)^2 \neq 4 \text{ alors } -2 \neq 2 \gg$
Réciproque de $R = \ll \text{Si } (-2)^2 = 4 \text{ alors } 2 = -2 \gg$
- $S = \ll \text{si } \forall x \in \mathbb{R}, (x < a \Rightarrow x \leq b) \text{ alors } a \leq b \gg$
non $S = \ll \forall x \in \mathbb{R}, (x < a \Rightarrow x \leq b) \text{ et } a > b \gg$
Contraposée de $S = \ll \text{si } a > b \text{ alors } \exists x \in \mathbb{R}, (x < a \text{ et } x > b) \gg$
Réciproque de $S = \ll \text{si } a \leq b \text{ alors } \forall x \in \mathbb{R}, (x < a \Rightarrow x \leq b) \gg$

Exercice 2

- Si l'équation est vérifiée, on a $A \cup X = B$. Or $A \subset A \cup X$ donc $A \subset B$.
 - $B \setminus A \subset B$ donc $B \setminus A \subset A \cup X$. Comme $B \setminus A \not\subset A$, on en déduit donc $B \setminus A \subset X$. Il n'y a pas égalité a priori; en effet X se décompose sous la forme $X = B \setminus A \cup Y$ avec $Y \subset A$.
 - Réciproquement, posons $X = B \setminus A \cup Y$ avec $Y \subset A$.
alors $A \cup X = A \cup (B \setminus A \cup Y) = A \cup (B \setminus A) \cup Y = A \cup (B \setminus A) = B$ car $Y \subset A$.
Conclusion :
Si $A \not\subset B$, (E_1) n'a pas de solution.
Si $A \subset B$ alors $(E_1) \iff X = B \setminus A \cup Y$ avec $Y \subset A \iff A \subset X \subset B$
- Analyse**
Si l'équation est vérifiée, on a $A \cap X = B$. Or $A \cap X \subset A$ donc $B \subset A$.
 $A \cap X \subset X$ donc $B \subset X$. Il n'y a pas égalité a priori; en effet X se décompose sous la forme $X = B \cup Y$ avec $Y \not\subset A$.
Synthèse
Posons $X = B \cup Y$ avec $Y \subset \bar{A}$.
On a alors $A \cap X = A \cap (B \cup Y) = (A \cap B) \cup (A \cap Y) = A \cup B = B$ car $Y \subset \bar{A} \Rightarrow A \cap Y = \emptyset$ et $B \subset A \Rightarrow A \cup B = B$.
Conclusion :
Si $B \not\subset A$, (E_2) n'a pas de solution.
Si $B \subset A$ alors $(E_2) \iff X = B \cup Y$ avec $Y \subset \bar{A} \iff X \subset A \setminus B$

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{P}(n) = \ll F_n \in \mathbb{N} \text{ et } F_n \geq n \gg$.

• Aux rangs 0 et 1 : $F_0 = 1$ donc $F_0 \in \mathbb{N}$ et $F_0 \geq 0$. $F_1 = 1$ donc $F_1 \in \mathbb{N}$ et $F_1 \geq 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ donc $F_{n+2} \in \mathbb{N}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

De plus, $F_{n+2} \geq n + n + 1 \geq 2n + 1 \geq n + 2 \Leftrightarrow n \geq 1$

On aura donc le cas $n = 0$ à examiner à part. $F_2 = 1 + 1 = 2 \geq 2$. On obtient finalement dans tous les cas que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N} \text{ et } F_n \geq n$

Comme $F_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{P}(n) = \ll F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n \gg$.

• Au rang 1 : $F_1^2 - F_0F_2 = 1^2 - 2 = -1 = (-1)^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 - F_n(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_nF_{n+1}$.

Or $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, d'où $F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1}$.

En remplaçant on obtient : $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 - F_nF_{n+1} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^n$ d'après l'hypothèse de récurrence.

On a donc $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^{n+1}$ soit $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{P}(n) = \ll \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n} - 1 \gg$

• Au rang 1 : $\sum_{k=0}^0 F_{2k+1} = F_1 = 1$ et $F_{2 \times 1} - 1 = 2 - 1 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} + F_{2n+1} = F_{2n} - 1 + F_{2n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Or $F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$ soit $\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2n+2} - 1$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n} - 1$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{P}(n) = \ll \sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1 \gg$

• Au rang 0 : $\sum_{k=0}^0 F_k = F_0 = 1$ et $F_{0+2} - 1 = 2 - 1 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k = \sum_{k=0}^n F_k + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Or $F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$ soit $\sum_{k=0}^{n+1} F_k = F_{n+3} - 1$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$

Exercice 4

$$\begin{aligned}
 (\Sigma) \begin{cases} x + my + 2z = 1 & L_1 \\ x + 2my + 3z = 0 & L_2 \\ mx + y + 2z = m & L_3 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ my + z = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-m^2)y + (2-2m)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2z + my = 1 \\ z + my = -1 \\ 2(1-m)z + (1-m^2)y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2z + my = 1 \\ z + my = -1 \\ (m-1)^2y = 2(1-m) & L_3 \leftarrow L_3 - 2(1-m)L_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Cas 1 : $m = 1$

$$\begin{aligned}
 (\Sigma) &\iff \begin{cases} x + 2z + y = 1 \\ z + y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 2 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ z + y = -1 \end{cases} \\
 &\iff (x, y, z) = (-z + 2, -z - 1, z) = z(-1, -1, 1) + (2, -1, 0)
 \end{aligned}$$

L'intersection est donc la droite passant par le point $A(2, -1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (-1, -1, 1)$

Cas 2 : $m \neq 1$

$$\text{On obtient en remontant le système triangulaire } (\Sigma) \iff \begin{cases} x = \frac{3-m}{1-m} \\ y = \frac{2}{1-m} \\ z = \frac{m+1}{m-1} \end{cases}$$

L'intersection est donc le point B_m de coordonnées $\left(\frac{3-m}{1-m}, \frac{2}{1-m}, \frac{m+1}{m-1}\right)$

Exercice 5

$$1. \quad k^3 - 1 = k^3 - 1^3 = (k-1)(k^2 + k + 1) \text{ et } k^3 + 1 = k^3 - (-1)^3 = (k+1)(k^2 - k + 1).$$

$$2. \quad (k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 1 = k^2 + k + 1.$$

$$\begin{aligned}
3. P_n &= \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \prod_{k=2}^n (k^2 + k + 1)}{\prod_{k=2}^n (k+1) \prod_{k=2}^n (k^2 - k + 1)} = \frac{(n-1)! \prod_{k=2}^n ((k+1)^2 - (k+1) + 1)}{\frac{(n+1)!}{2} \prod_{k=2}^n (k^2 - k + 1)} \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \frac{\prod_{\ell=k+1, \ell=3}^{n+1} (\ell^2 - \ell + 1)}{\prod_{k=2}^n (k^2 - k + 1)} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{4 - 2 + 1} \quad (\text{produit télescopique})
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$P_n = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{3(1 + \frac{1}{n})} \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{2}{3}$$

Exercice 6

$$1. S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=k}^n 2^j \right) = \sum_{k=0}^n 2^k \frac{1 - 2^{n-k+1}}{1 - 2} \quad (\text{somme des } n - k + 1 \text{ premiers termes de la suite géométrique de raison } 2 \text{ et de premier terme } 2^k).$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n 2^k (2^{n-k+1} - 1) = \sum_{k=0}^n (2^{n+1} - 2^k) = \sum_{k=0}^n 2^{n+1} - \sum_{k=0}^n 2^k = (n+1)2^{n+1} - 2^0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$\text{soit} \quad S_n = n2^{n+1} + 1$$

$$2. \begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ k \leq j \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq j \end{cases}$$

$$\text{d'où } S_n = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j 2^j = \sum_{j=0}^n 2^j \left(\sum_{k=0}^j 1 \right) \quad \text{d'où} \quad S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$$

$$3. \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = \sum_{j=k-1, j=0}^{n-1} (j+1)2^j = S_{n-1} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

$$4. T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1} = \sum_{i=1}^n (i2^{i+1} + 1) = \sum_{i=1}^n i2^{i+1} + \sum_{i=1}^n 1 = 2^2 \sum_{i=1}^n i2^{i-1} + n \quad \text{donc} \quad T_n = 4((n-1)2^n + 1) + n$$

Exercice 7

$$\begin{aligned}
1. \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} &= \frac{(n-p)!}{(k-p)!(n-p-k+p)!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(k-p)!(n-k)!p!} \\
\binom{n}{k} \binom{k}{p} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{n!}{(n-k)!p!(k-p)!}
\end{aligned}$$

donc
$$\binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$

2. $S_1 = \sum_{p=0}^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p}$ soit $S_1 = \binom{n}{k} 2^k$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \binom{n}{p} \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n-p}{k-p} = \binom{n}{p} \sum_{\ell=k-p, \ell=0}^{n-p} (-1)^{\ell+p} \binom{n-p}{\ell} \\ &= (-1)^p \binom{n}{p} \sum_{\ell=0}^{n-p} (-1)^{\ell} \binom{n-p}{\ell} = (-1)^p \binom{n}{p} (-1+1)^{n-p} \end{aligned}$$

Comme $(-1+1)^{n-p} = 0$ si $n \neq p$ et $(-1+1)^{n-p} = 1$ si $n = p$, on en déduit que

$$S_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ (-1)^n & \text{si } n = p \end{cases}$$