Colle 1 : Techniques fondamentales en calcul algébrique.

Preuves à connaître

Proposition 1

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Proposition 2 Exemple de raisonnement par Analyse-Synthèse (Théorème de décomposition)

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Proposition 3 Sommes et produits télescopiques

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ et $m \leqslant n$ et $(z_k)_{m \leqslant k \leqslant n}$ une famille de nombres réels.

$$\sum_{i=m}^{n} (z_{i+1} - z_i) = z_{n+1} - z_m.$$

Si pour tout $k \in [\![m,n]\!]$, $z_k \neq 0$, alors

$$\prod_{i=m}^{n} \frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{z_{n+1}}{z_m}.$$

Proposition 4 Sommes fondamentales (un seul des 4 résultats, qui sera précisé, sera à démontrer)

- Somme des entiers, de leur carré et de leur cube.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

- Somme des termes de la suite géométrique $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $x \neq 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Proposition 5 Formule de Pascal

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Savoir se servir de cette formule pour calculer les coefficients $\binom{6}{3}$ et $\binom{7}{4}$ par exemple.

Proposition 6 Formule du binôme de Newton

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \forall n\in\mathbb{N}$,

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

Proposition 7 Système linéaire

Connaître les différentes étapes de l'algorithme du pivot de Gauss et les mettre en application pour résoudre un système linéaire.

Proposition 8 Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de (S) est soit vide soit la somme de la solution générale du système homogène associé et d'une solution particulière de (S) (c'est-à-dire d'une solution quelconque de (S)).

Proposition 9 (Formules de Cramer)

On considère le système suivant

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$$

(S) est de Cramer si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ (c'est le déterminant de (S)).

À savoir faire

- ☐ Ecrire la négation d'une proposition.
- ☐ Exercices sur les ensembles : union, intersection, différence, complémentaire
- ☐ Raisonnements par analyse et synthèse ; par disjonction de cas ; par l'absurde ; par contraposition.
- ☐ Récurrence simple, double et forte pour établir qu'une propriété est vraie pour tout entier supérieur à n_0. (Par exemple, pour établir une égalité portant sur les termes d'une suite définie par récurrence)
- ☐ Calculer une somme en utilisant la linéarité et les sommes fondamentales, ou en remarquant une somme télescopique. Exprimer un produit simple à l'aide de puissances et de la factorielle.
- ☐ Résoudre un système linéaire. Déterminer l'ensemble des solutions, l'écrire sous la forme : solution particulière + ensemble des solutions du système homogène associé.

Le programme officiel

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
b) Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;
- résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	
b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.