TD 27 : Déterminants

Calculs de déterminants

Ex 1 Sans les calculer, expliquer pourquoi les déterminants suivants sont nuls :

(a) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ (b) $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ (c) $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (d) $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

a) Une ligne est nulle ! b) Utiliser 1 comme pivot b) pivot de Gauss d)aussi

Ex 2 Calculer les déterminants suivants et les mettre sous forme factorisée :

(a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ (b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \log_b(a) \\ \log_a(b) & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

(d) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix}$ (e) $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

a et b : formule directe c) développer par rapport à la bonne colonne d) pivot de Gauss e) On peut remarquer que la somme sur chaque ligne est 3+x : faisons donc $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

Calculs de déterminants d'ordre n

Ex 3 Calculer les déterminants suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}_n \qquad B_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n \qquad C_n = \begin{vmatrix} a & & & (0) & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ (0) & & a & b & & (0) \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & (0) & & & a \end{vmatrix}_{2n}$$

b) On peut remarquer que la somme sur chaque ligne est 3+x : faisons donc $C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_n$
c) récurrence : développer par rapport à la 1ere colonne puis recommencer

Généralités sur le déterminant d'une matrice

Ex 4 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme en λ de degré n. Déterminer les coefficients de λ^n, λ^{n-1} et λ^0.Par récurrence sur n : on peut développer par rapport à la première colonne.¨

Ex 5 Soit $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Montrer que A ne peut pas être inversible. Ce résultat est-il encore valable si $A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$? On a $A^T = -A$. Appliquer le déterminant à cette égalité

Ex 6 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que $\det(\operatorname{com}(A)) = (\det A)^{n-1}$.Pas à faire avant d'avoir défini la comatrice

Généralités sur le déterminant d'une famille de vecteurs

Ex 7 **Applications géométriques**

1. Les vecteurs $\vec{u}(2,1,0), \vec{v}(1,3,1)$ et $\vec{w}(5,2,1)$ sont-ils libres?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (Π) passant par le point A de coordonnées $(1,1,1)$ et engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3. Les systèmes de vecteurs suivants forment-ils des bases de $\mathbb{R}^3$? si oui, sont-elles directes ?

   (a) $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3)$

   (b) $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$

Déterminant d'un endomorphisme

Ex 8 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\sigma \in S_n$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall i \in [\![1, n]\!], f(\vec{e}_i) = \vec{e}_{\sigma(i)}$. Déterminer $\det(f)$.

Ex 9 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. On considère p et s respectivement un projecteur et une symétrie de E. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det(p)$ et $\det(s)$? Retrouver le résultat à l'aide de leurs matrices respectives dans la base $\mathcal{B}$.

Ex 10 Soit $D : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ avec $E = \text{vect}\left(f_1 : t \mapsto e^t, f_2 : t \mapsto e^{2t}, f_3 : t \mapsto e^{3t}\right)$.
Calculer le déterminant de l'endomorphisme D. D est-il un automorphisme de E ? Ecrire la matrice de D dans la base (f_1, f_2, f_3) : elle est diagonale

Ex 11 **Diagonalisation et application à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 3.**

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 de base canonique $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) = 0$.
   λ est appelée valeur propre de A et X **est un vecteur propre associé à** λ
2. En calculant $\det(A - \lambda I_3) = 0$, montrer que A admet trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
3. Déterminer un vecteur propre X_i associé à chaque λ_i.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = (X_1, X_2, X_3)$ forme une base de E et déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
5. On cherche la forme générale des suites réelles u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} + 4u_{n+1} - 12u_n$

   (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$, puis $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.

   (b) En exprimant A^n en fonction de D^n, expliciter u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.

Formules de Cramer

Ex 12 Résoudre les systèmes suivants à l'aide des déterminants:

$$(C_1) : \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = 1 \end{array} \right. \qquad (C_2) : \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{array} \right.$$