# TD 26 : Séries numériques

## Théorèmes de comparaison

**Ex 1** Déterminer la nature des séries suivantes

1) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ 2) $\sum \frac{n^2}{n^3+n}$ 3) $\sum \frac{1}{\ln n}$

4) $\sum \left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)$ 5) $\sum \frac{2n}{2^n+n}$ $\sum \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}$

7) $\sum e^{-\sqrt{n}}$ 8) $\sum \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}}$ 9) $\sum \frac{1}{n^3 \ln(n)}$

10) $\sum \frac{n!}{n^n}$ 11) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 12) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$

1)Équivalent en $+\infty$ 2)Équivalent en $+\infty$ 3)$n\ln(n) \to +\infty$ 4) Équivalent en $+\infty$ 5)$n^2 u_n \to 0$ 6)Équivalent en $+\infty$ : après DL en 1 de arctan 7)$o(1/n^2)$ 8)$u_n > \frac{1}{n}$ 12) >1/n

**Ex 2** Déterminer la nature des séries suivantes

1) $\sum \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln n}$ Divergence grossière 2) $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ avec $a > ($

4) $\sum \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - (\mathrm{Arctan}\, n)^{\frac{3}{5}}$ Utiliser $\mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arctan}\,(1/x) = \frac{\pi}{2}$ et un DL de arctan en 0 5) $\sum \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$ Passer sous form

7) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 8) $\sum$

10) $\sum \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 11) $\sum (-1)^n ($

## Comparaison série/intégrale

**Ex 3**

1. Montrer la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n}$
   (a) à l'aide des théorèmes de comparaison.
   (b) de la comparaison série/intégrale.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n}$.
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$ où $\gamma$ est la constante d'Euler.

**Ex 4** Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ puis un équivalent des sommes partielles.

**Ex 5** **Fonction $\zeta$ de Riemann**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\zeta$ par : $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$, $\zeta$ est-elle définie ?
2. A l'aide de la comparaison série/intégrale, montrer que $\zeta(\alpha) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}$.
3. Si on note $S_n$ et $R_n$ respectivement les suites des sommes partielles et des restes d'ordre $n$ de la série associée à $\zeta$, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{R_n}{S_n}$.

---

Calculs de sommes

---

**Ex 6** **Étude de séries alternées**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant l'identité $\frac{1}{\alpha n + 1} = \int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t$, montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$ converge et déterminer sa somme sous forme d'une intégrale.
2. En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

**Ex 7** Montrer la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes

1) $\sum \frac{n}{n^4+n^2+1}$ 2) $\sum \frac{1}{n(n+4)}$ 3) $\sum \frac{1}{n(2n+1)}$

4) $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ 5) $\sum (n+1)3^{-n}$ 6) $\sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1}$

**Ex 8** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $\nu_2(n)$ le nombre de 1 dans l'écriture binaire de $n$.

1. Montrer que $\nu_2(n) \leqslant \log_2(n) + 1$. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\nu_2(n)}{n(n+1)}$ converge.
2. Justifier que $\nu_2(2n) = \nu_2(n)$ et $\nu_2(2n+1) = \nu_2(n) + 1$, puis calculer la somme de la série.

---

Lien suite/série

---

**Ex 9** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ pour la suite $(u_n)$ soit convergente avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \alpha \ln(n)$$

2. Exprimer alors sa limite en fonction de la constante d'Euler $\gamma$.

**Ex 10** Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln(\ln(n))$.

---

Exercices théoriques

---

**Ex 11**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que la série $\sum \frac{P(n)}{n!}$ est convergente. On notera $S(P)$ sa somme.
2. Calculer $S(X), S(X(X-1)), S(X^2)$ et $S(X^3)$.

**Ex 12** Étudier la nature de la série $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ où $P$ et $Q$ sont des polynômes à coefficients réels.

**Ex 13** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On considère la série de terme général $u_n = (n^4+n^2)^{\frac{1}{4}} - P(n)^{\frac{1}{3}}$.
Déterminer $P$ pour que la série $\sum u_n$ converge.

**Ex 14** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Établir que l'équation $x^n + nx - 1 = 0$ admet une unique solution, notée $x_n$, sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que $(x_n)$ converge vers 0.
3. Étudier, suivant $\alpha$, la nature de la série de terme général $x_n^\alpha$.

**Ex 15** Soit $(u_n)$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 > \sqrt{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} (2-u_n)$. En déduire la nature de $\sum u_n$.

**Ex 16** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels positifs. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
Déterminer la nature des séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

---

## Familles sommables

---

**Ex 17** Permutation des sommes

Soit $(a_p)_{p\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n,p) \in I$ , on pose $u_{n,p} = \frac{p}{n(n+1)} a_p$ si $p \leqslant n$ , $u_{n,p} = 0$ sinon. Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

**Ex 18** Somme double

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ . Utiliser le théorème de Fubini (version positive) : exprimer la somme comme une double somme. On identifiera une somme télescopique

**Ex 19** Exemples de familles non sommables

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$ ;
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ , $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$ .

**Ex 20** Somme avec paramètre

On pose, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ .

**Ex 21** Produit de Cauchy

Pour $n \geqslant 0$ , on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$ .

1. Montrer que la série de terme général $w_n$ converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.