TD 25 : Intégration sur un segment

Continuité uniforme

Ex 1

1. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ mais pas lipschitzienne.On peut découper le problème en deux parties : sa restriction à $[0,1]$ est un fonction continue sur un segment. Sur $[1,+\infty[$ cet argument n'est plus valable, mais sa dérivée étant bornée elle est ...

Ex 2 Soit f une fonction uniformément continue sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de D telles que $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.

1. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.
2. Dire si les fonctions suivantes sont uniformément continues sur l'intervalle considéré.
   (a) $f(x) = 1/x$ sur $[1,+\infty[$ Dérivée bornée .
   (b) $f(x) = 1/x$ sur $]0,1]$ Non : on se servira du prmier poiint, avec $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{2n}$. .
   (c) $f(x) = \sin(x^2)$ sur $\mathbb{R}$ Non : on se servira du prmier poiint, avec $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{2n}$. .

Ex 3 Montrer que toute fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ est majorée par une fonction affine. En appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, il existe δ... Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}^+$, on découpe $[0,x]$ en intervalle de longeur $< delta$: $0 \leq x_1 \leq .. \leq x_n = x$ entre x_i et x_{i+1}, la fonction f varie d'une quantité majorée par 1. On conclut : $f(x) \leq f(0) + n$: mais comment faire le lien entre n et x ?

Ex 4 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant la défintion de convergnce vers ℓ_1 et ℓ_2, on en déduit l'existence d'un $A > 0$ tel que sur $[A,+\infty[$ la fonctoin soit proche de ℓ_1, sur $]-\infty,-A]$ elle soit proche de ℓ_2, et sur $[-A,A]$: continue sur un segment donc ...

Calcul intégral

Ex 5 Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \iff f$ est de signe constant On suppose $\int_a^b f \geq 0$ (sinon, on peut considérer $-f$ qui vérifie les mêmes hypothèses) puis $g = |f| - f \geq 0$ et est d'intégrale nulle.

Ex 6 Lemme de Lesbegue

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
   Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t = 0$$
   Faire une IPP
2. Montrer que le lemme de Lebesgue est encore vrai si f est seulement continue par morceaux. On peut réexprimer $\int_a^b f(t)e^{in(t+\frac{\pi}{n})}$ à l'aide d'un changement de variable. On est ensuite capable de majorer $|f(t) - f(t-\frac{\pi}{n})|$ par $\omega(n)$ une quantité qui ne dépend pas de t et qui tend vers 0 (en utilisant l'uniforme continuité)

Ex 7 Soient f et g continues sur $[0,1]$, positives telles $fg \geqslant 1$. Prouver que : $\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right) \geqslant 1$. Penser à Cauchy-Schwarz

Suites définies par une intégrale

Ex 8 Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ de terme général :

(a) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x^2}\,dx$ (b) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ Pour a) et b) $\varepsilon > 0$ découper en $\int_0^{1-\varepsilon} \dots + \int_{1-\varepsilon}^1 \dots$..

(c) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin t}\,dt$ (d) $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (\operatorname{Arcsin} t)^n\,dt$ c) Découper en $\int_0^{\varepsilon} \dots + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \dots$..d) : majorer par $\frac{C^n}{n!}$

(e) $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{n \sin x}{n+x}\,dx$ Comparer u_n avec $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$ dont on précisera soigneusement qu'elle existe (est-ce évident que la fonction intégrée soit continue ?)

Ex 9 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n t\,dt$.
Montrer que la suite (I_n) est monotone puis convergente. Établir la formule de récurrence liant I_n et I_{n+1}, puis trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$. Utiliser la croissance de l'intégrale, et le fait que sur $[1,e]$, la fonction logarithme est à valeurs dans $[0,1]$.

Sommes de Riemann

Ex 10 Considérons les intégrales suivantes $\displaystyle\int_0^1 t\,dt$, $\displaystyle\int_0^2 e^t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\,dt$. Exprimer chacune des intégrales comme limite d'une somme de Riemann et retrouver alors la valeur de chacune.
Avec la méthode des rectangles à gauches, on a $a_i = \frac{i}{n}$ dans le premier cas $\frac{2i}{n}$ dans le deuxième et $\frac{i\pi}{n}$ dans le troisième

Ex 11 Calculer les limites des suites (u_n) définie par :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ Faire apparaître $1+(\frac{k}{n})^2$ au dénominateur (b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ Faire apparaître $\frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2}$

(c) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+\cdots+\sqrt[n]{2^n}\right)$ (d) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Ex 12 Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left|x-e^{it}\right|\,dt$ à l'aide de sommes de Riemann.

Intégrale dépendant de sa borne

Ex 13 Déterminer la limite quand a tend vers 0^+ de $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx$

Ex 14 Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt$. faire une IPP, et majorer le terme restant

Ex 15 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f puis son signe.
2. Étudier le comportement de f en $+\infty$ puis en 0.
3. Soit $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$. Calculer $g(x)$ et montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x)) = 0$. En déduire que f peut être prolongée par continuité en 1 et que ce prolongement est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer sa dérivée.

Ex 16 Soit Φ la fonction définie par : $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Sur quel sous-ensemble I de $\mathbb{R}$, Φ est-elle définie? Vérifier que Φ est continue sur I.
2. Montrer que Φ peut être prolongée en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ que l'on notera encore Φ. Préciser $\Phi(0)$ et $\Phi'(0)$.
3. Donner le sens de variations de Φ.
4. Déterminer la limite de Φ en $+\infty$ et prouver que $\mathscr{C}_\Phi$ est comprise entre deux branches d'hyperboles.

Ex 17 Soit Ψ la fonction définie par : $\forall x \in [0,\pi]\,,\, \Psi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$.

1. Justifier l'existence et la continuité de Ψ sur $[0,\pi]$.
2. Soit $x \in [0,\pi[$. Calculer explicitement $\Psi(x)$.
3. En déduire $\Psi(\pi)$.

Formules de Taylor

Ex 18 A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à une fonction bien choisie, déterminer la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donner un majorant de l'erreur commise au rang n : $\varepsilon_n = |u_n - \ell|$.

(a) $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ (b) $u_n = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$ Utiliser l'inégalité avec la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 ; avec la fonction $x \mapsto e^{-x}$ en 0

Problèmes de recollement

Ex 19 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $xy' + y = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ sur $]-1,0[$ et $]0,1[$. En déduire qu'il existe une unique solution définie sur $]-1,1[$.
2. $|x|\,y' + (x-1)y = x^3$ sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?