Séries et déterminant

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1

Soit f une application n-linéaire.
f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Proposition 2

Soit f une application n-linéaire alternée de E dans F.
Si $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille liée de E alors $f(x_1,\dots,x_n)=0_F$.

Proposition 3 Théorème

Soit f est une forme n-linéaire alternée sur E un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathcal{B}=(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$

Pour toute famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in E^n$, si $x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$, alors

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i_1,i_2,\dots i_n=1}^{n}a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_n,n}f(e_{i_1},\dots,e_{i_n}),$$

$$\text{d'où}\quad f(x_1,\dots,x_n)=\left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}\right)f(e_1,\dots,e_n).$$

Définition 1 Théorème

Il existe une unique forme n-linéaire alternée f_0 sur E qui vérifie $f_0(e_1,\dots,e_n)=1$, on l'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}=(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et on le note $\det_{\mathcal{B}}$.
On a donc par définition : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=\det_{\mathcal{B}}(e_1,\dots,e_n)=1$.

Proposition 4 Il est possible d'utiliser la proposition 2 sans démonstration

1. Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée de E alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=0$.
2. Si $\mathcal{B}'$ est une base de E alors $\det_{\mathcal{B}'}=\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$.
   De plus, $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\neq 0$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})^{-1}=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$
3. Conséquence :$(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille liée de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=0$

Définition 2 Déterminant d'un endomorphisme

Si f est un endomorphisme de E, il existe un unique scalaire λ tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in E^n$, on ait :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1),\dots,f(x_n))=\lambda\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n).$$

Ce scalaire est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E choisie, il est appelé **déterminant de l'endomorphisme** f et noté $\det(f)$.

Proposition 5 Propriétés

Soient $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
- $\det(0_{\mathscr{L}(E)}) = 0, \det(\mathrm{Id}_E) = 1$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda^n$.
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(g \circ f)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

Proposition 6

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\det(A) = \det(A^T)$.
Le déterminant de A est donc le déterminant de ses vecteurs lignes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 7

Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$$

Conséquence : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et de base $\mathcal{B}$. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

Proposition 8 Proposition

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par blocs par $A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \dots & * & a_{nn} \end{array}\right)$ alors $\det(A) = a_{nn} \det(A')$.

Proposition 9 Proposition (Développement par rapport à une colonne/ligne)

Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors
$$\forall j \in [\![1,n]\!], \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

(où $\Delta_{i,j}$ est le mineur d'indice i, j de la matrice A.)

À savoir faire

- ☐ Tout sur les séries (mais rien sur les familles sommables)
- ☐ Savoir calculer un déterminant : si la matrice est triangulaire, effectuer le produit des coefficients diagonaux
- ☐ Sinon : on peut appliquer la méthode du pivot (attention : chaque dilatation par λ multiplie le déterminant par λ)
- ☐ Lorsque une ligne (ou une colonne) comporte surtout des trmes nuls : on développe par rapport à celle-ci
- ☐ Se servir du déterminant pour savoir si une famille est liée ou libre

Ce qu'en dit le programme

B - Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. ~~La démonstration de l'existence n'est pas exigible.~~
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles. L'application det induit un morphisme de $GL(E)$ (resp. $GL_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$.	
Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde. Sera vu en cours le 10-11juin	 Lien avec les polynômes de Lagrange.
f) Comatrice	
Comatrice. Relation $A\,\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$.Sera vu en cours le 10-11juin	Notation $\mathrm{Com}(A)$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.