

Ex 16

$$(S_1): \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ -3y + 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 12z = 6 \end{cases} \\ & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1/2 \\ z = +1/2 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y & 0 & 0 & = 5 \\ & z & 0 & = -1 \\ & 2z & 0 & = -2 \\ & -z + t & = -3 \end{cases} \\ & L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ & L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ & L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ & L_4 \leftarrow L_4 - L_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y & 0 & 0 & = 5 \\ & z & 0 & = -1 \\ & 0 & 0 & = 0 \\ & t & = -4 \end{cases} \\ & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x \\ z = -1 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \left(x, \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x, -1, -4 \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ & = \left(0, \frac{5}{3}, -1, -4 \right) + \mathbb{R} \left(1, -\frac{2}{3}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

$$S_3: \begin{cases} \textcircled{x_1} + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \quad \textcircled{x_3} + 2x_4 + x_5 = 2 \checkmark \\ \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \quad -x_3 - 2x_4 + -x_5 = 1 \checkmark \end{cases} \\ l_2 \leftarrow l_2 - l_1 & \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ \quad \quad \quad x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \checkmark \\ \quad \quad \quad \textcircled{0} \neq \textcircled{0} \neq \textcircled{0} = 3 \checkmark \end{cases} \\ l_3 \leftarrow l_3 + l_2 & \end{aligned}$$

Absurde donc système incompatible $\checkmark$

$$S = \emptyset \checkmark$$

$$S_4: \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ \textcircled{0} \quad -x_2 + 4x_3 = 3 \checkmark \\ \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \quad 4x_3 = 4 \checkmark \\ \textcircled{0} \quad x_2 \quad \textcircled{0} = 2 \checkmark \end{cases} \\ l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 & \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 & \\ l_4 \leftarrow l_4 - l_1 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ \textcircled{0} \quad -x_2 + 4x_3 = 3' \\ \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \quad 4x_3 = 4 \\ \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \quad 4x_3 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Condition de compatibilité non remplie donc $S = \emptyset \checkmark$

$$-2x_4 - (x - x_4)$$

$$-4 - (-8) \\ -3 + -5$$

$$S5: \begin{cases} \textcircled{x_1} - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 2L_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 0 \quad 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 0 \quad -8x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 0 \quad -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$L_4 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ -8x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - 8L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + 5L_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -\textcircled{x_2} - x_3 = 0 \\ 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ -8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{15}{12} - \frac{5x_5}{4 \times 3} \\ \frac{10}{4} \quad \frac{10}{24}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ 4\textcircled{x_3} + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 12x_4 - 15x_5 = 0 \end{cases}$$

$$4 \times \frac{4}{24} + \frac{5}{4}$$

On passe x_5 en paramètre

$$x_1 = \left(\frac{15}{22} + \frac{15}{44} - \frac{15}{11} + 1 \right) x_5 = \frac{24}{44} x_5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{15}{44} x_5 \\ x_3 = -\frac{15}{12} x_5 - \frac{5}{4} x_5 = \left(-\frac{15}{12} - \frac{5}{4} \right) x_5 = -\frac{115}{44} x_5 \\ x_4 = +\frac{15}{12} x_5 + \frac{5}{4} x_5 \end{cases}$$

$$S = \{ (x_5, 4x_5 \in \mathbb{R}) \}$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 4L_1 - L_4 \end{matrix}$

$\text{rg}(A) = 2$ ✓

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{matrix}$

Faites plutôt
 $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{matrix}$ ✓

$\text{rg}(B) = 2$ ✓

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2a-1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 8-a \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow aL_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 4L_1 - L_4 \end{matrix}$

Dilatation par
 a .
Mais c'est interdit
lorsque $a=0$.

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2a-1 \\ 0 & 0 & 1-a & \frac{1}{2}(a-1) \\ 0 & 0 & 1-a & \frac{1}{2}(-a^2+8a-7) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow \frac{1}{2}(a-1)L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}(a-1)L_4 - L_2 \end{matrix}$

Interdit
si $a=1$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 2a-1 \\ 0 & 0 & 1-a & \frac{1}{2}(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-a^2+8a-7) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix}$

• Si $a \neq 1$ ou $a \neq 7$

$\text{rg}(C) = 4$

• Si $a = 7$

$\text{rg}(C) = 3$

Si $a=1$ on aurait

$\text{rg}(C) = 4$

$C \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_2 + L_4 \end{matrix}$

Si $a=0$ $\text{rg}(C) = 4$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 4L_1 - L_4 \end{matrix}$

$$(d) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
 $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$L_4 \leftarrow L_3 + L_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m & 2-m-m^2 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_2 + L_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & 3-2m-m^2 \end{pmatrix}$$

~~Il y a un cas particulier~~
 Ce n'est pas un cas particulier

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & 3-2m-m^2 \end{pmatrix}$$

Si $m=0$

les vecteurs sont ^{non-}colinéaires $[\text{rg}(D) = 4]$

si $m=1$

$\text{rg}(A) = 1$

Si $m \neq 1$

$[\text{rg}(D) = 4]$

$\triangle 3-2m-m^2$ s'annule aussi pour $m=3$.
 Dans ce cas, le rang vaut 3.

$$(f) \quad F = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (n-1)b+a & b & \dots & b \\ \vdots & a & & \\ \vdots & b & \ddots & \\ (n-1)b+a & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

$C_1 \leftarrow \sum_{k=2}^n C_k$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_n \leftarrow L_n - L_1$$

$$\begin{pmatrix} (n-1)b+a & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{pmatrix}$$

cas $a=b \neq 0$ $\boxed{\text{rg}(F) = 1}$ ✓

cas $a=b=0$ $\boxed{\text{rg}(F) = \cancel{1} \quad 0}$.

cas $a = (1-n)b$ et $b \neq 0$.

$\boxed{\text{rg}(F) = n-1}$ ✓

et $a \neq (1-n)b$.

cas $a \neq b \neq 0$ ✓ $\boxed{\text{rg}(F) = n}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & c & a & c \\ b & b & d & d \\ ab & cb & ad & cd \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - bL_2 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-a & 0 & c-a \\ 0 & 0 & d-b & d-b \\ 0 & 0 & a(d-b) & c(d-b) \end{pmatrix}$

$\sim$ $L_4 \leftarrow L_4 - aL_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-a & 0 & c-a \\ 0 & 0 & d-b & d-b \\ 0 & 0 & 0 & (c-a)(d-b) \end{pmatrix}$

• Si $a \neq c$ et $b \neq d$ $\text{rg}(E) = 4$.

• Si $a \neq c$ et $b = d$ $\text{rg}(E) = 2$

• Si $a = c$ et $b \neq d$ $\text{rg}(E) = 3$

• Si $a = c$ et $b = d$ $\text{rg}(E) = 1$.

Ex 7:

 $\mathbb{C}_3[x] : \text{base } B \quad u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_3[x])$

$$\text{Mat}_B(u) = A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbb{C})$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } |j-i|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) (M) $B' = (1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2))$ est libre
 $\hookrightarrow$ contient 4 éléments

Soit $(b_i)_{i \in \{1, 2, 3, 4\}} \in \mathbb{C}^4 / \sum_{i=1}^4 b_i$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 /$

$$a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + bx + cx^2 - cx + (dx^3 - dx^2 - dx^2 + 2dx) = 0$$

$$= dx^3 - 2dx^2 - dx^2 + 2dx$$

$$\Leftrightarrow dx^3 + (c - 3d)x^2 + (b - c + 2d)x + a = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ c-3d=0 \\ b-c+2d=0 \\ a=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Ainsi B' est libre et elle
 contient 4 vecteurs qui est

la dimension de $\mathbb{C}_3[x]$

D'où B' est une base de $\mathbb{C}_3[x]$.

2) $P_B^{B'} = \text{Mat}_B(B')$ on a $B = (1, x, x^2, x^3)$

$$= \text{Mat}_{B', B}(\text{id}_{\mathbb{C}_3[x]})$$

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 & x & x^2-x & x^3-2x^2-x^2+2x = x^3-3x^2+2x \\ & & x(x-1) & x(x-1)(x-2) \end{matrix}$

$$P_{B'}^B = \text{Mat}_{B'}(B) = \text{Mat}_{B', B'}(\text{id}_{\mathbb{C}_3[x]})$$

$$P_{B'}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ & & & \end{matrix}$

Cela n'a pas de sens: pour un vecteur, il n'y a qu'une base.

31 soit $Q \in \mathbb{C}_3[X]$, soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$

$$Q = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Donc $\text{Mat}_{B, B'}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & b & 3a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 - x \\ x^3 - 3x^2 + 2x \end{matrix}$

$$\text{Mat}_B(u) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{matrix}$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_{B'}(u) = P_{B'}^B \text{Mat}_B(u) P_B^{B'} \\ = \text{Mat}_{B', B}(\text{id}_{\mathbb{C}_3[X]}) \text{Mat}_B(u) \text{Mat}_{B, B'}(\text{id}_{\mathbb{C}_3[X]})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\text{Mat}_{B'}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ a+b+c \\ a+b+3a \\ a \end{pmatrix}$$