

Sandjiv
Rahim

Guillaume

TD 23 Variables aléatoires

Exercice 6

$$X_1(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$X_2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$P(Z=0) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

car on n'a qu'une manière d'obtenir le couple (k, k) avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Soit $k \in [1, 5]$

Soit $x_1 \in X_1(\Omega)$ et $x_2 \in X_2(\Omega)$ x_2 appartient à une variable aléatoire ???

$$P(Z=k) = P(|X_1 - X_2| = k)$$

$$= \sum_{x_1=1}^6 P(x_1 = k + x_2, x_1 \geq k) + \sum_{x_2=1}^6 P(x_2 = k + x_1, x_2 \geq k)$$

$$= \frac{6-k}{36} + \frac{6-k}{36}$$

$$= \frac{6-k}{18} \checkmark$$

Manque d'explications.

$$E(Z) = \sum_{k=1}^5 k P(Z=k) \text{ car on peut enlever le terme 0.}$$

$$= \sum_{k=1}^5 k \left(\frac{6-k}{18} \right) \checkmark$$

$$= \sum_{k=1}^5 \frac{k}{3} - \frac{k^2}{18} \checkmark$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 6}{2} - \frac{1}{18} \times \frac{5 \times 6 \times 11}{8} = \frac{5}{3} - \frac{55}{18} = \frac{35}{18} \approx 1,9 \checkmark$$

$$E(Z^2) = \sum_{k=1}^5 k^2 \left(\frac{6-k}{18} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^5 k^2 - \frac{1}{18} \sum_{k=1}^5 k^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - \frac{1}{18} \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2$$

$$= \frac{55}{3} - \frac{25}{2} = \frac{35}{6}$$

$$E(Z)^2 = \left(\frac{35}{18} \right)^2 = \frac{1225}{324}$$

On a donc d'après la formule de Koenig - Huygens

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$= \frac{35}{6} - \frac{1225}{324}$$

$$= \frac{85}{36}$$

Exercice 4)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, X une var à valeurs dans $[0, m]$ /

$$\forall k \in [0, m], P(X = k) = \frac{a}{k+1} \binom{m}{k}$$

• On rappelle que $\sum_{k=0}^m P(X = k) = 1$

$$\text{donc } a \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} = 1$$

$$\Leftrightarrow a \left(\sum_{k=0}^m \frac{m!}{(k+1)!(m-k)!} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m+1-(k+1))!} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{n+1} \left(\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \right) - 1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{n+1} (2^{n+1} - 1) = 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow a = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1} \quad \checkmark$$

$$\bullet E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X=k)$$

$$= a \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$= a \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) \binom{n}{k} \quad \checkmark$$

$$= a \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \right) \quad \checkmark$$

$$= a \left(2^n - \frac{1}{a} \right) \quad \checkmark$$

$$= a 2^n - 1 \quad \checkmark$$

$$= \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1} - 1} - 1 \quad \checkmark$$

$$\bullet E(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 P(X=k)$$

$$= a \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$= a \sum_{k=0}^n \left(k - \frac{k}{k+1} \right) \binom{n}{k}$$

$$= a \left(\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} \right)$$

$$= \left(a \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \right) - E(X) \quad \checkmark$$

$$= \left(a \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \right) - E(X)$$

$$= \left(a n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} \right) - E(X) \quad \checkmark$$

$$= a n 2^{n-1} - E(X) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
 &= an2^{n-1} - E(X) - E(X)^2 \\
 &= an2^{n-1} - E(X)(1 + E(X)) \quad / \\
 &= an2^{n-1} - (a2^n - 1)(1 + a2^n - 1) \\
 &= an2^{n-1} + (1 - a2^n)a2^n \quad \checkmark \checkmark
 \end{aligned}$$

$$V(X) = an2^{n-1} + a2^n - a^24^n$$

$$\text{avec } a = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}$$

ABEL
ANAROUTOU
CHOU QAIR
GRONDIN
FILEZAC

Mardi, 23 avril 2024.

exercice 3.

1 ca). $\Omega = \llbracket 1, m^2 \rrbracket$.

$$X(\Omega) = \llbracket 1, m \rrbracket$$

On est en situation d'équiprobabilité.

$$\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, P(X=k) = \{P(U_1 \leq k) \times P(U_2 = k)\} + \{P(U_1 = k) \times P(U_2 < k)\}$$

$$P(X=k) = \frac{k}{m} \times \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \times \frac{k-1}{m}$$

$$P(X=k) = \frac{k}{m^2} + \frac{k-1}{m^2}$$

$$P(X=k) = \frac{2k-1}{m^2} \quad \checkmark$$

(b). Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. $p_k := P(X=k)$
montrons que $\sum_{k=1}^m p_k = 1$.

On a:

$$\sum_{k=1}^m \frac{2k-1}{m^2} = \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k=1}^m 2k-1 \right) = \frac{1}{m^2} \times \frac{2m(m+1)-m}{2}$$

$$= \frac{1}{m^2} \times m^2 + m - m = 1 \quad \checkmark$$

(c).

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^m k P(X=k) = \sum_{k=1}^m k \times \frac{2k-1}{m^2} \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m (2k^2 - k) = \frac{1}{m^2} \left(\frac{2(m(m+1)(2m+1))}{6} - \frac{m(m+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - m(m+1) \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \left(\frac{m(m+1)(2m+1) - 3m^2 - 3m}{3} \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \left(\frac{2m^3 + m^2 + 2m^2 + m - 3m^2 - 3m}{3} \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \left(\frac{2(m^3 - m)}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(m - \frac{1}{m} \right) \end{aligned}$$

2(a) $\Omega = [1, m]$

$\gamma(\Omega) = [2, m-1]$

Factoriser par $n(n+1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)}{n^2} \left[\frac{2n+1}{3} - 1 \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{n} \left[\frac{2n-2}{3} \right] = \frac{2}{3} \frac{(n+1)(n-1)}{n} \end{aligned}$$

Bastien Exercice n° 5:

Grégory
Hugo

- urne :
 - 60⁶⁰ boules blanches
 - 40 boules noires
 - tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage
 - X , la var. qui dénombre le nb de boules noires avant
- 1) Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ le tirage d'une boule blanche.
- Si l'on obtient aucune boule blanche lors des n tirages on a d'après la formule des proba. composées:

$$P(X) = \left(\frac{2}{5}\right)^n \quad P(X=0) = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

- Sinon, toujours d'après la formule des proba. composées:

$$P(X \geq 1) \times P_{X \geq 1}(X \geq 2) \times \dots \times P_{X \geq k-2}(X \geq k-1) \times P_{X \geq k-1}(X = k).$$

$$P(X=k) = \underbrace{P(X=1) \times \dots \times P(X=k-1)}_{k-1 \text{ termes}} \times \frac{3}{5}$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{5}$$

(car les événements sont indépendants)

→ Votre formule des proba composées était fautive.

2) Soit P la fonction polynôme définie

$$\text{par } P(x) = \sum_{k=0}^n x^k \cdot 19. \quad E(X) = \frac{5}{3} - (n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\text{On a : } E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^n \frac{3}{5} k \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} = \frac{3}{5} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

Par ailleurs

$$P(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1$$

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=0}^n k x^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)(x^n - x^{n+1}) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x^{n+1}(n+1) - x^n(n+1) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

P'
plutôt!

Ainsi $E(X) = \frac{3}{5} \cdot f'\left(\frac{2}{5}\right)$

$$= \frac{3}{5} \cdot \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}(n+1) - \left(\frac{2}{5}\right)^n(n+1) + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \right)$$

$$= \frac{5}{3} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}(n+1) - \left(\frac{2}{5}\right)^n(n+1) + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \right)$$

$$= \frac{5}{3} \left((n+1) \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right) + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \right)$$

$$= \frac{5}{3} \left((n+1) \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(-\frac{3}{5}\right) + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \right)$$

$$= -(n+1) \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \cdot \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Remarque: pour $n \gg 1$, $E(X) \approx \frac{5}{3}$ donc il faudra
en moyenne environ $\frac{5}{3}$ tirages pour obtenir une boule blanche.
↳ Cela semble cohérent.

Beaulieu dea
Dijoux - legros
Hanéa

Exercice 9:

$$1) P(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) = 0,2 \quad \checkmark$$

$$P(X=1) = 0,5 \quad \checkmark \text{ et } P(Y=1) = 0,2 \quad \checkmark$$

$$P(X=1) \times P(Y=1) = 0,1 \quad \checkmark$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes $\checkmark$

2)

X \ Y	0	1	2	3	loi marginale de X
1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5
2	0,1	0	0	0,1	0,2
3	0,1	0	0,2	0	0,3
loi marg de Y	0,3	0,2	0,3	0,2	1

$$3) E(X) = 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3)$$

$$= 1 \times 0,5 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,3$$

$$= 1,8 \quad \checkmark$$

$$E(Y) = 0 \times P(Y=0) + 1 \times P(Y=1) + 2 \times P(Y=2) + 3 \times P(Y=3)$$

$$= 1 \times 0,2 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 \quad \checkmark$$

$$= 1,4 \quad \checkmark$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\bullet E(X^2) = \frac{1}{3} \times \sum_{k=1}^3 k^2 = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 4 \times 7}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

$\sum_{k=1}^3 k^2 P(X=k) = 0,5 \times 1^2 + 0,2 \times 2^2 + 0,3 \times 3^2$

$$V(X) = \frac{14}{3} - (1,8)^2 = 1,43$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$\bullet E(Y^2) = \frac{1}{4} \times \frac{3 \times 4 \times 7}{6} = \frac{21}{6}$$

$$= 0 \times 0,3 + 1 \times 0,2 + 4 \times 0,3 + 9 \times 0,2$$

$$V(Y) = \frac{21}{6} - (1,4)^2 \approx 1,54$$

4) $IP_{Y=j} (X=i)$

i \ j	1	2	3
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	1	0	0
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$IP_{X=i} (Y=j)$

i \ j	0	1	2	3
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0

5) • $IP(U=0) = IP(\{Y=0\} \cap \{X=1\}) + IP(\{Y=0\} \cap \{X=2\}) + IP(\{Y=0\} \cap \{X=3\})$
 $= 0,3 \checkmark$

• $IP(U=1) = IP(\{Y=1\} \cap \{X=1\}) = 0,2 \checkmark$

• $IP(U=2) = IP(\{Y=1\} \cap \{X=2\}) + IP(\{X=1\} \cap \{Y=2\}) = 0,1 \checkmark$

• $IP(U=3) = IP(\{X=3\} \cap \{Y=1\}) + IP(\{X=1\} \cap \{Y=3\})$
 $= 0,1 \checkmark$

• $IP(U=4) = IP(\{X=2\} \cap \{Y=2\}) = 0 \checkmark$

• $IP(U=5) = IP(\{X=2\} \cap \{Y=3\}) + IP(\{X=3\} \cap \{Y=2\}) = 0,1 + 0,2 = 0,3 \checkmark$

• $IP(U=9) = IP(\{X=3\} \cap \{Y=3\}) = 0 \checkmark$

→ faire un tableau pour récapituler.

6) $IP(V=0) = IP(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) + IP(\{X=2\} \cap \{Y=0\})$
 $+ IP(\{X=3\} \cap \{Y=0\}) = 0,3 \checkmark$

$IP(V=1) = IP(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) + IP(\{X=1\} \cap \{Y=2\})$
 $+ IP(\{X=1\} \cap \{Y=3\}) + IP(\{Y=1\} \cap \{X=2\}) + IP(\{Y=1\} \cap \{X=3\})$
 $= 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0 + 0 = 0,4 \checkmark$

$$\begin{aligned} IP(V=2) &= IP(\{X=2\} \cap \{Y=2\}) + IP(\{X=3\} \cap \{Y=2\}) + \\ &\quad IP(\{Y=3\} \cap \{X=2\}) \\ &= 0 + 0,2 + 0,1 = 0,3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$IP(V=3) = IP(\{X=3\} \cap \{Y=3\}) = 0 \quad \checkmark$$