

6. 1. La famille n'est pas libre car il y a plus de vecteurs $\textcircled{5}$ que la dimension.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
On résout $a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 + c\vec{x}_3 + d\vec{x}_4 = (x, y, z)$

$$\begin{cases} 2a + b + c - d = x \\ -3a - b + 2d = y \\ 4a + c - d = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c - d = x \\ L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2 \quad b + 3c + d = 3x + 2y \quad \checkmark \\ L_3 \leftarrow 2L_1 + L_3 \quad 2b + c - d = 2x - z \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c - d = x \quad \checkmark \\ L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3 \quad b + 3c + d = 3x + 2y \quad \checkmark \\ \quad \quad \quad 5c + 3d = 4x + 4y + z \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-21x - 16y - 4z + 12d}{10} \\ b = \frac{12x + 12y + 3z - 14d}{5} \\ c = \frac{4x + 4y + z - 3d}{5} \end{cases}$$

Elle est donc génératrice $\checkmark$

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$0 = aP_1 + bP_2 + cP_3$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b = 0 \text{ alors } b = 0 \\ -3b + 7c = 0 \Leftrightarrow 7c = 0 \text{ donc } c = 0 \\ -a + b - c = 0 \Leftrightarrow -a = 0 \text{ donc } a = 0 \end{cases}$$

alors $\boxed{a=b=c=0}$ donc c'est libre $\checkmark$

Il y a 3. vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$

la famille n'est donc pas génératrice

