Intégration et séries

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un segment de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est continue sur I alors $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F_a' = f$.

Proposition 2 Formule de Taylor avec reste intégrale

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$. Pour tout $b \in I$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 3 Conséquence : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\left|f^{(n+1)}\right| \leqslant M$ sur I, alors pour tout $b \in I$, on a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proposition 4 Théorème (Condition nécessaire de convergence)

Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Savoir aussi montrer que la réciproque est fausse en donnant un contre-exemple (série harmonique)

Proposition 5 Théorème de comparaison par majoration/minoration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. On a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 6 Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, positive et décroissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f$$

On en déduit que $\sum u_n$ converge ssi $\left(\int_1^n f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Proposition 7 Théorème (Série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, appelé **série de Riemann**, converge ssi $\alpha > 1$.

Proposition 8

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge. De plus, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Proposition 9 Théorème des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors

- la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ converge, vers une limite notée S vérifiant $S \geq 0$
- pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, en définissant $R_n = S - S_n$, on vérifie que R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$.
- pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq u_{n+1}$.

À savoir faire

- ☐ Pour une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dire si $\sum u_n$ converge : si la série est à termes positifs, on peut chercher un équivalent de u_n en $+\infty$ et conclure.
  Si la série n'est pas à termes positifs, on peut appliquer le TSA (cas où l'on le terme général est de la forme forme $(-1)^n u_n$) ou on cherche à prouver la convergence uniforme
- ☐ Calculer des intégrales : IPP, changement de variable
- ☐ Savoir appliquer les formules de Taylor avec reste intégrale et l'inégalité de Taylor Lagrange
- ☐ Savoir reconnaître des sommes de Riemann, ce qui permet de déterminer la limite d'une suite de la forme $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$
- ☐ Utiliser l'inégalité triangulaire, l'inégalité de la moyenne pour majorer une intégrale (application : pour montrer que $I_n = \int_a^b f_n(t)\,dt \to 0$ où f_n est une suite de fonctions par exemple)
- ☐ Justifier qu'une fonction est uniformément continue/ lipschitzienne.

Ce qu'en dit le programme

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
f) Formules de Taylor globales	
Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Procédés sommatoires discrets

L'étude des séries prolonge celle des suites et permet d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique. Les objectifs majeurs en la matière portent sur les séries à termes positifs et la convergence absolue. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer " en vrac" une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0,+\infty]$ se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps.
On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente. Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme. Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles.
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
d) Théorème des séries alternées	
Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.