Lois usuelles et intégration

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Lois usuelles

Donner l'univers-image, la loi (donner $\mathrm{P}(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$) et donner l'espérance et la variance de X lorsque

- $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$
- $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$
- $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$

Proposition 2

Rappeler la définition d'uniforme continuité. Démontrer que si f est lipschitzienne alors elle est uniformément continue.
Énoncer le théorème de Heine puis donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue.

Proposition 3 Lemme

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ_ε et ψ_ε sur $[a,b]$ telle que

$$\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \varepsilon$$

Définition 1 Donner la définition et montrer que les deux valeurs sont égales : on utilisera le lemme 1

Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a,b])$.
On pose $I_-(f) = \sup\left\{ \int_a^b \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f \right\}$ et $I_+(f) = \inf\left\{ \int_a^b \psi \,\middle|\, \psi \in \mathscr{E}([a,b]), f \leqslant \psi \right\}$.
Ces deux valeurs sont finies et égales ; leur valeur commune est appelée intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$.

Proposition 4 Croissance de l'intégrale

- Soit $(f,g) \in \mathscr{C}_m^0(I)^2$ avec I segment de $\mathbb{R}$ contenant a et b.

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ et } f \leqslant g \text{ alors } \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

- Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a,b])$.

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Proposition 5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}_m^0([a,b])^2$. Alors

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

Connaître la preuve de l'inégalité. Être capable de dire dans quel cas cette inégalité est une égalité (mais sans donner la démonstration pour cela).

Proposition 6 Inégalité de Minkowski

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}_m^0([a,b])^2$. Alors

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}$$

Connaître la preuve de l'inégalité et démontrer dans quel cas cette inégalité est une égalité.

Proposition 7 Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a,b]$, $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors $f = 0$. Donner la démonstration et connaître un contre-exemple en retirant l'hypothèse $f \geq 0$ et un contre-exemple en retirant l'hypothèse "f est continue."

Proposition 8 Théorème

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $(S_n(f))$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f$.

Proposition 9 Propriétés

Rappeler la définition de l'intégrale pour une fonction à valeurs complexes.

i) $\operatorname{Re}\left(\displaystyle\int_a^b f\right) = \displaystyle\int_a^b \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}\left(\displaystyle\int_a^b f\right) = \displaystyle\int_a^b \operatorname{Im}(f)$ ii) $\overline{\displaystyle\int_a^b f} = \displaystyle\int_a^b \overline{f}$

Montrer que • $I : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m^0([a,b],\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}\right.$ est une forme linéaire.

À savoir faire

- ☐ Justifier qu'une fonction est uniformément continue/ lipschitzienne.

  Tous les exercices de probabilités avec des lois usuelles : $\mathscr{B}(p)$ $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{U}(E)$ où E est fini
- ☐ Montrer que deux matrices sont semblables, ou au contraire ne le sont pas (dans ce cas, penser à utiliser les invariants de similitude)
- ☐ Savoir utiliser les formules de changement de base pour trouver la matrice dans la base canonique d'une application dont la matrice est simple dans une autre base (par exemple : projecteur ou symétrie)
- ☐ Donner la matrice d'une application linéaire de E vers F dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
- ☐ Calculer la trace d'un endomorphisme
- ☐ Appliquer la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice.
- ☐ Appliquer la méthode du pivot de Gauss pour déterminer si une matrice est inversible, pour l'inverser lorsque cela est possible.
- ☐ Déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire à l'aide d'une résolution de système linéaire

Ce qu'en dit le programme

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

a) Continuité uniforme

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Continuité uniforme.	Exemple des fonctions lipschitziennes.
Théorème de Heine.	La démonstration n'est pas exigible.

b) Fonctions continues par morceaux

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.	
Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.

c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,dt$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f \rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,dt$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

d) Sommes de Riemann

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Pour f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$	Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.