

DS n°9 : concours blanc**Durée : 4 heures****Problème 1 : Algèbre et probabilités**

Dans tout le problème $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^3 et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice M dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}$$

I. Étude de l'endomorphisme u

Dans cette partie X, Y et Z désignent trois réels et $S = X + Y + Z$.

- Déterminer, suivant les valeurs des réels X, Y et Z , le rang de u , une base de $\ker u$ ainsi que sa dimension. La matrice M est-elle inversible ?
- (a) Calculer M^2 .
(b) Démontrer que M est la matrice d'un projecteur ssi $X = Y = Z = 0$ ou $S = 1$
- (a) Discuter suivant la valeur de λ , le rang de la matrice $M - \lambda I_3$. (*Indication : on peut par exemple s'intéresser à l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$*)
(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ est une valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Déterminer les valeurs propres de M .
(c) Dans cette question -et uniquement cette question- on suppose que $Z \neq 0$ et $S \neq 0$. Pour les différentes valeurs propres λ de M , préciser le rang de $M - \lambda I_3$ et donner une base de $\text{Im}(M - \lambda I_3)$. Préciser ensuite la dimension de $\ker(M - \lambda I_3)$ et en donner une base.
(Remarque un tel sous-espace-vectoriel est appelé espace propre de M associé à la valeur propre λ).

M sera dite **diagonalisable** si elle est semblable à la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de M , autrement dit $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), M = P\Delta P^{-1}$.

- Supposons que $S = 0$.
(a) Quelles sont les matrices semblables à la matrice nulle ?
(b) En déduire que M est diagonalisable ssi $X = Y = Z = 0$.
- Supposons que $S \neq 0$.
(a) Montrer que les vecteurs $f_1 = e_1 - e_2, f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$ forment une base \mathcal{B}_1 de \mathbb{R}^3 .
(b) Déterminer la matrice Δ de u dans la base \mathcal{B}_1 .
(c) En déduire que M est diagonalisable. On explicitera une matrice P , et on calculera P^{-1} telles que $M = P\Delta P^{-1}$.

Partie 2 : Fonctions génératrices

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. On appelle **fonction génératrice de X** la fonction G_X définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$$

1. Justifier que G_X est une fonction polynôme. Calculer $G_X(1)$.
2. (a) Rappeler la formule de Taylor appliquée en 0 pour un polynôme G_X . En déduire $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction des dérivées successives de G_X en 0.
 (b) En déduire que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
 (c) Exprimer l'espérance et la variance de X en fonction de $G_X'(1)$ et $G_X''(1)$.

3. Calculer G_X dans le cas où X suit une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

4. Si $n = 1$, calculer G_X dans le cas où X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

5. (a) Justifier que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes alors s^X et s^Y aussi et en déduire que

$$\forall s \in \mathbb{R}, G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

Il est possible de démontrer par récurrence que si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $\forall s \in \mathbb{R}, G_Y(s) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(s)$ (ce résultat sera admis pour la suite et aucune démonstration n'est attendue)

- (b) Calculer G_X dans le cas où X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Partie 3 : Application aux matrices aléatoires

Dans cette partie, X, Y et Z désignent trois variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et suivant une même loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Donner sans calcul l'espérance et la variance de X .
2. Démontrer à l'aide des fonctions génératrices que $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Quelle est la loi, l'espérance et la variance de $S = X + Y + Z$?
3. Quelle est la probabilité pour que M soit la matrice d'un projecteur ?
4. Soit T la variable aléatoire désignant le nombre de valeurs propres de la matrice M . Vérifier que $T(\Omega) = \{1, 2\}$. Donner la loi, l'espérance et la variance de T .
5. Quelle est la probabilité pour que M soit diagonalisable ?
6. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité pour qu'au moins une ligne soit égale à la somme des deux autres ? On rappelle la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p} \quad \text{si } p \leq n+m$$

Problème 2 : Interpolation et Polynômes factoriels

Notations du problème :

- \mathcal{F} désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur \mathbb{R} .
- E le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Si $f \in \mathcal{F}$ on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles ainsi définies:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que Δ et T sont des endomorphismes de \mathcal{F} . Par convention, on note $\Delta^0 = T^0 = \text{id}_{\mathcal{F}}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1} \quad \text{et} \quad T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}$$

Partie 1

1. Déterminer $\Delta(f)$ lorsque f est constante.
2. Montrer que si $P \in E$ alors $\Delta(P) \in E$; calculer le degré et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de ceux de P lorsque P n'est pas constant.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'application ci-dessous définit bien un endomorphisme:

$$\begin{aligned} \Delta_n : E_n &\rightarrow E_n \\ P &\mapsto \Delta(P) \end{aligned}$$

Déterminer $\text{Ker}(\Delta_n)$.

En déduire le rang de Δ_n puis déterminer $\text{Im}(\Delta_n)$.

4. Dédurre des questions précédentes que l'endomorphisme induit sur E par Δ est surjectif.
5. Montrer que pour tout $P \in E$ il existe $Q \in E$ unique tel que

$$Q(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta(Q) = P$$

Partie 2

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynomiales N_k par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

6. (a) Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des $(N_j)_{j \in \mathbb{N}}$.
(b) Pour $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\Delta^j(N_k)$ puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.
7. (a) Montrer que la famille (N_0, N_1, \dots, N_n) est une base de E_n .
(b) Soit $P \in E_n$ tel que $P = a_0N_0 + a_1N_1 + \dots + a_nN_n$ avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Exprimer les coefficients a_j en fonction de $(\Delta^j)(P)(0)$.

8. (a) Dans cette question on pose $P(x) = x^2$. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = aN_0(x) + bN_1(x) + cN_2(x)$$

(b) En déduire une fonction polynôme Q telle que $\Delta(Q) = P$.

(c) Exploiter les résultats de cette question pour calculer $\sum_{k=1}^n k^2$.

9. (a) Soit $f \in \mathcal{F}$. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ la valeur de $(T^k(f))(x)$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\Delta^n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T^k(f)$$

En déduire que $(\Delta^n(f))(0)$ ne dépend que des valeurs que prend f aux points $0, 1, \dots, n$.

Partie 3

Soit $f \in \mathcal{F}$ fixée. On cherche les polynômes P solutions du problème suivant :

$$\deg(P) \leq n \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad P(k) = f(k) \quad (\mathcal{P})$$

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad N(x) = \prod_{j=0}^n (x - j)$$

10. Soit φ l'application linéaire:

$$\begin{aligned} \varphi : E_n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(0), \dots, P(n)) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un isomorphisme.

En déduire que le problème (\mathcal{P}) possède une unique solution notée P_f .

11. Pour $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.

En déduire l'expression de P_f en fonction des nombres $\Delta^j(f)(0)$ et des polynômes N_j .

12. Dans cette question, on suppose que f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R} . On note

$$M_{n+1} = \text{Sup} \left\{ \left| f^{(n+1)}(t) \right|, \quad t \in [0; n] \right\}$$

(a) Soit $x \in [0; n]$ un réel fixé. Montrer que

$$\exists \xi \in [0; n] \quad f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} N(x)$$

On pourra considérer la fonction $g : t \mapsto f(t) - P_f(t) - K \cdot N(t)$, où K est une constante choisie de sorte que $g(x) = 0$, et utiliser le théorème de Rolle.

(b) En déduire que

$$\forall x \in [0; n] \quad |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{n+1}$$