

Devoir surveillé 2

L'usage de tout matériel électronique ou de tout document est interdit.

Durée : 4h

Vous êtes invités à soigner la présentation de votre copie, à mettre en évidence les principaux résultats (en les encadrant), à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes de vos affirmations. La qualité de la rédaction prend une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Si une question vous bloque, vous pouvez bien évidemment l'admettre (en le disant clairement) et passer à la suite.

Questions indépendantes

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
 |2x - 4| \leq |x + 2| &\iff (x \leq -2 \text{ et } -2x + 4 \leq -x - 2) \\
 &\quad \text{ou } (-2 \leq x \leq 2 \text{ et } -2x + 4 \leq x + 2) \\
 &\quad \text{ou } (x \geq 2 \text{ et } 2x - 4 \leq x + 2) \\
 &\iff (x \leq -2 \text{ et } -x \leq -6) \\
 &\quad \text{ou } (-2 \leq x \leq 2 \text{ et } -3x \leq -2) \\
 &\quad \text{ou } (x \geq 2 \text{ et } x \leq 6) \\
 &\iff (x \leq -2 \text{ et } x \geq 6) \\
 &\quad \text{ou } \left(-2 \leq x \leq 2 \text{ et } x \geq \frac{2}{3} \right) \\
 &\quad \text{ou } (x \geq 2 \text{ et } x \leq 6) \\
 &\iff x \in \emptyset \text{ ou } x \in \left[\frac{2}{3}, 2 \right] \text{ ou } x \in [2, 6] \\
 &\iff x \in \left[\frac{2}{3}, 6 \right]
 \end{aligned}$$

2. $\sin(2x) = \frac{1}{2} \implies \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff 2x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

$$\iff x \equiv \frac{\pi}{12}[\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{12}[\pi]$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3. $\cos(2x) = \cos(x)^2 \iff 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) \iff \cos^2(x) - 1 = 0$

$$\iff (\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) = 0 \iff \cos(x) = 1 \text{ ou } \cos(x) = -1 \iff x \equiv 0[\pi] \text{ Donc } \mathcal{S} = \pi\mathbb{Z}$$

4. $\text{sh} \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$ Cette fonction est bien définie sur \mathbb{R} car le dénominateur $e^x + e^{-x}$ est strictement positif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Elle est également dérivable sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x).$$

Or pour tout réel x , $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $\text{sh}' > 0$ et sh est donc strictement croissante sur \mathbb{R}

Son domaine de définition (i.e. \mathbb{R}) est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2} = -\text{sh}(x)$ donc sh est impaire. Enfin, on $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$

et par imparité $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$	+	
$\text{sh}(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5. Résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(1 + 2i)z^2 - (4 + 3i)z - 11 + 3i = 0$$

On calcule $\Delta = (4 + 3i)^2 - 4(1 + 2i)(-11 + 3i) = 16 - 9 + 24i - 4(-11 - 6 + 3i - 22i) = 7 + 24i - 4(-17 - 19i) = 7 + 68 + 24i + 76i = 75 + 100i$ On cherche ensuite a et b réels tels que $\delta := a + ib$

$$\text{vérifie } \delta^2 = \Delta. \text{ On a } \delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 75 \\ 2ab = 100 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{75^2 + 100^2} = \sqrt{25^2(3^2 + 4^2)} = |25|\sqrt{9 + 16} = 125 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a^2 = (75 + 125)/2 = 100 \\ b^2 = (125 - 75)/2 \\ 2ab = 100 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 10 \\ b = \pm 5 \\ ab \geq 0 \end{cases} \text{ Comme } a \text{ et } b \text{ doivent être de même signe, on}$$

peut choisir $\delta = 10 + 5i$ ou $\delta = -10 - 5i$, on fera ici le premier choix. L'équation admet deux solutions $z_1 = \frac{4+3i+10+5i}{2(1+2i)} \frac{(14+8i)(1-2i)}{2(1^2-2^2)} = \frac{30-20i}{10} = 3 - 2i$ et

$$z_2 = \frac{4+3i-10-5i}{2(1+2i)} \frac{(-6-2i)(1-2i)}{2(1^2-2^2)} = \frac{-10+10i}{10} = -1 + i$$

Conclusion $\mathcal{S} = \{3 - 2i; -1 + i\}$

Exercice : Étude de Coth

1. Continuité et limites

(a) coth est définie ssi $e^x \neq e^{-x}$. Or $e^x = e^{-x} \iff e^{2x} = 1 \iff x = 0$.

Donc coth est définie ssi $x \neq 0$ et $D = \mathbb{R}^*$.

coth est dérivable et donc continue sur D par composition de fonctions dérivables sur D .

(b) D est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D$, $\text{Coth}(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x} = -\text{Coth}(x)$ donc

coth est impaire.

(c) Pour tout $x \in D$, $\text{Coth}(x) = \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-2x})} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$ et $\text{Coth}(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

(d) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Coth}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$.

La droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Coth}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = -1$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$.

La droite (Δ') d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Coth}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{-2x}) = 0^+$ car $e^{-2x} \leq 1$ pour $x \geq 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Coth}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^{-2x}) = 0^-$ car $e^{-2x} \geq 1$ pour $x \leq 0$.

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe en 0.

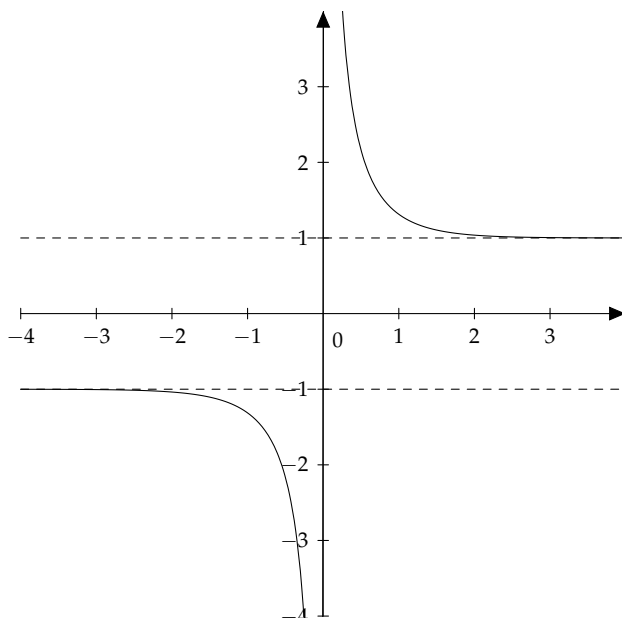
2. Étude des variations

(a) Pour tout $x \in D$, $\text{Coth}'(x) = -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} < 0$

(b) Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\coth'(x)$	$-$		$-$
$\coth(x)$	-1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ -1

(c) Courbe de la fonction \coth :



Problème I : autour des nombres complexes

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : Racines de l'unité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif de cet exercice est de résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$\left(\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}\right)^{2n} = 1 \quad (E)$$

1. Donner les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $Z^{2n} = 1$.
2. Montrer pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\}$, $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ on a

$$\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = u \iff z^2 = \frac{u + 1}{u - 1}$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E). On précisera le nombre de solutions complexes et le nombre de solutions réelles.

Partie 2 : Entiers de Gauss

Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.

Culture : on dit que $+$ et \times sont des lois de composition interne dans $\mathbb{Z}[i]$ i.e. une opération binaire par laquelle $\mathbb{Z}[i]$ est stable.

- Trouver les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, i.e. les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $\alpha\beta = 1$.
Culture : on note communément $(\mathbb{Z}[i])^\times$ cet ensemble.
- Soit $z = 26,8 + 42,1i$, trouver $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z_1 - \omega| \leq 1$.
- Vérifier que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - \alpha| < 1$.
- Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, i.e. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que

$$\alpha = \beta \times q + r \quad \text{et} \quad |r| < |\beta|$$

Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$.

Culture : on dit que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.

Problème II : cosinus d'une fraction de π .

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des nombres réels $\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)$ avec n et m entiers naturels non nuls. Rappelons qu'un réel r est un rationnel lorsqu'il existe deux entiers relatifs p et q ($q \neq 0$) avec p et q premiers entre eux tel que $r = \frac{p}{q}$. **On pourra utiliser sans les démontrer les résultats suivants d'arithmétique élémentaire.**

- **Lemme 1.** Soit a, b et c trois entiers relatifs, si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc alors a divise c .
- **Lemme 2.** Si deux entiers p et q sont premiers entre eux, alors p est premier avec toutes les puissances de q .

La partie 2 utilise les résultats et les notations de la partie 1. En revanche la partie 3 peut se traiter de façon indépendante.

Partie 1.

Dans cette partie, on va établir quelques résultats qui seront utiles par la suite. Désormais, m désigne un entier naturel non nul.

- Soit a et b deux réels avec $b \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, prouver que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(\frac{mb}{2}\right) \cos\left(a + (m-1)\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

On désigne par n un entier naturel non nul et pour tout entier relatif k , on pose

$$a_k = (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

- Comparer a_k, a_{k+2n+1} et a_{2n+1-k} puis, montrer que

$$\forall (s, k) \in \mathbb{Z}^2 \quad 2a_s a_k = a_{s+k} + a_{s-k}$$

Que devient cette relation lorsque $k = s$?

- Etablir la relation qui suit

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

-Calculer $\sum_{k=0}^{2n} a_k$ et en déduire que -

$$\sum_{k=1}^n a_k = -\frac{1}{2}$$

- Déduire des relations précédentes, une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de radicaux.

Partie 2.

Dans cette partie, on pose $n = 3$ et l'on utilise les notations précisées dans la partie précédente.

5. Calculer s_1, s_2 et s_3 où

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3 \quad s_2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 \quad s_3 = a_1 a_2 a_3$$

6. Montrer que a_1, a_2 et a_3 sont solutions de l'équation suivante :

$$x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3 = 0 \quad (1)$$

7. L'objectif de cette question est de montrer que l'équation

$$x^3 + \text{playstyle}\frac{1}{2}x^2 - \text{playstyle}\frac{1}{2}x - \text{playstyle}\frac{1}{8} = 0 \quad (2)$$

n'admet pas de solution rationnelle. On suppose que $\text{playstyle}\frac{p}{q}$ (où p et q sont deux entiers relatifs premiers entre eux) est un rationnel solution de (2).

- a) Montrer que

$$8p^3 = -4p^2q + 4pq^2 + q^3$$

- b) A l'aide de résultats admis d'arithmétique (voir début du problème), montrer que q divise 8, puis que p divise 1.

- c) En déduire que $\text{playstyle}\frac{p}{q}$ appartient à un ensemble de 8 éléments que l'on précisera.

- d) Conclure et montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ n'est pas un rationnel.

Partie 3.

Dans cette partie, on se propose de montrer que 0,28 ne peut pas être le cosinus d'un réel de la forme $\text{playstyle}\frac{n\pi}{m}$.

8. Soit θ un réel, établir l'équivalence qui suit :

$$\text{playstyle}\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q} \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = 1$$

9. Montrer que si $\text{playstyle}\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ alors les nombres $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$, lorsque n décrit \mathbb{N} ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

10. On pose $z = 0,28 + 0,96i = e^{i\theta_0}$, montrer que pour tout entier naturel n , il existe a_n et b_n deux entiers relatifs tels que :

$$\operatorname{Re}\left(z^{2^n}\right) = \text{playstyle}\frac{a_n}{10^{2^n+1}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(z^{2^n}\right) = \text{playstyle}\frac{b_n}{10^{2^n+1}}$$

11. Montrer que a_n n'est pas divisible par 5.

12. En déduire que $\text{playstyle}\frac{\theta_0}{\pi}$ n'est pas un rationnel.