TD 24 : Matrice d'une application linéaire

Ex 1 Vérifier que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer leur matrice dans la base canonique associée puis leur noyau et leur image :

1. Soit u : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y+z, x+2z) \end{array}$

2. Soit D : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P-XP' \end{array}$ sa matrice est de taille 3 et est triangulaire supérieure

3. Soit φ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P-\int_0^X P \end{array}$ Matrice a 3 colonnes et 4 lignes.

4. Soit F : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Cette matrice est de taille 4×4

Ex 2

1. On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \ker A \oplus \operatorname{Im} A$.
   Déterminer (u_1,u_2) base de $\ker(A)$ et (u_3,u_4) base de $\operatorname{Im}(A)$. Montrer que (u_1,u_2,u_3,u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Ex 3 Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que
$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B-A)$$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.
3. Calculer M^{-1} quand elle existe.

Équations matricielles

Ex 4 Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même définie par
$$\varphi(X) = -X + (\operatorname{tr} X)A$$

1. A quelle condition φ est-elle bijective ? Caractériser $(-\varphi)$ lorsque φ n'est pas bijective. Procéder par analyse et synthèse : si $\operatorname{tr}(A)=1$, φ ne peut pas être bijective. Sinon, pour M une matrice quelconque, on cherche un antécédent X possible par φ : il faut néceesairmeent que cet antécédent soir de la forme $-M+\lambda A$ et on cherche un λ qui pourrait convenir
2. Discuter et résoudre, pour B donné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $\varphi(X)=B$.

Ex 5 Discuter et résoudre, pour B donné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $XB-BX=I_n$. Penser à regarder la trace !

Ex 6 **Caractérisation des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$**
Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe une matrice unique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que,

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(X) = \operatorname{tr}(AX)$$

On peut étudier

$$\Theta : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A \mapsto \Theta_A := \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ X \mapsto \operatorname{tr}(AX) \end{cases} \end{cases}$$

et montrer que c'est un isomorphisme.

Changements de bases

Ex 7 Considérons le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et l'endomorphisme u sur $\mathbb{C}_3[X]$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ où $a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad |j-i| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.
3. En déduire les coordonnées d'un polynôme Q et la matrice de u dans la nouvelle base.

Ex 8 Soient $\vec{u}(-1,1,0)$, $\vec{v}(0,1,-1)$ et $\vec{w}(1,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On considère F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par $F = \operatorname{vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $G = \operatorname{vect}(\vec{w})$.

1. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Déterminer les matrices Π et Σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection π sur F parallèlement à G et de la symétrie σ par rapport à F parallèlement à G.
3. Vérifier que $\Pi^2 = \Pi$ et $\Sigma^2 = I_3$. Quelle lien y a-t-il entre Π et Σ?
   Interpréter ces résultats au niveau des endomorphismes π et σ.

Ex 9 Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A. Si on souhaite trouver une base (e_1, e_2, e_3) dans laquelle sa matrice est B, il faut déjà avoir $f(e_1) = f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Il faut également avoir $f(e_2) = e_1$ et donc $f^2(e_2) = 0\mathbb{R}^3$

Ex 10 **Diagonalisation 1**

On note A la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}^3$.
2. On pose $\vec{e}_1 = (3,1,0), \vec{e}_2 = (-1,1,1)$ et $\vec{e}_3 = (0,1,1)$. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
3. Déterminer sans calcul la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
4. Calculer $(A')^n$ puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 11 **Diagonalisation 2**

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\varphi(P) = (X^2+1)P'' + (X+1)P' + P$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique. C'est donc une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $\varphi(P) = \lambda P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Cela revient à résoudre un système (triangulaire) homogène dont les coefficients diagonaux dépendent de λ. On s'aperçoit que pour tout λ sauf trois valeurs bien particulières, ce système est de Cramer dans ce cas, il n'y a qu'une solution. Il faut ensuite traiter les 3 cas particuliers.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.Pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ traités précédemment, on a des polynômes P_1, P_2, P_3 tels que $\varphi(P_i) = \lambda_i P_i$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Calcul de l'inverse

Ex 12 Déterminer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$

Ex 13 Soit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$

1. Montrer que $F \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$, puis déterminer sa matrice A dans la base canonique. Il s'agit de placer dans la colonne correspondant à X^j (attention, cela commence pour $j=0$)la quantité $(X+1)^j$ décomposé dans la base canonique

2. Montrer qu'elle est inversible et calculer A^{-1}. Il est plus simple de déterminer F^{-1}. Sa matrice correspond ensuite à A^{-1}.

Ex 14 **Matrice à diagonale dominante**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Montrer que A est inversible.

Soit $X \in \ker(A) \setminus 0$, on note i l'entier pour lequel le module de la i^e corrdonnée est maximum. On a alors $AX = 0$ et en observant la i^e ligne : $a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$, et on en déduit que cela est absurde en utilisant l'inégalité triangulaire

Calcul du rang

Ex 15 Déterminer les rangs des matrices :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & c & a & c \\ b & b & d & d \\ ab & cb & ad & cd \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Résolution de systèmes linéaires

Ex 16 Résoudre les systèmes suivants à l'aide du pivot de Gauss

$(S_1) : \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x+3y+z=3 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ $(S_2) : \begin{cases} 2x+3y-z+t=2 \\ 2x+3y+z=4 \\ 2x+3y+2z=3 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ $(S_3) : \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+x_4+x_5=1 \\ x_1+3x_2-x_3+3x_4+2x_5=3 \\ x_1+3x_2-3x_3-x_4=2 \end{cases}$

$(S_4) : \begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$ $(S_5) : \begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$

Ex 17 Résoudre en fonction des paramètres α et p les systèmes suivants :

$$(\Sigma_\alpha) : \begin{cases} x+y+\alpha z = a \\ x+\alpha y+z = b \\ \alpha x+y+z = c \end{cases} \qquad (\Sigma_p) : \begin{cases} px+py+4z = 1 \\ 2x+y+pz = 1 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

Équations linéaires (révisions)

Ex 18 **EDL1**

1. Résoudre sur $]0,1[$ l'équation différentielle $xy'-y = 2x^2\ln^2(x)$.

2. Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle $\sqrt{1-x^2}\,y'-y = 1$.

Ex 19 **EDL2**

1. Résoudre l'équation différentielle $y''-y = e^x\cos(2x)$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y''+y = 3x^2$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ sachant qu'il existe une solution particulière de la forme $x \mapsto ax^2+bx+c$.

3. Résoudre l'équation différentielle $y''-4y'+4y = 2e^{2x}+4$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

Ex 20 **Récurrence linéaire d'ordre 2**

1. Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.Ce n'est pas une relation de récurrence linéaire : mais si l'on pose $v_n = \ln(u_n)$, on vérifie que la suite v satisfaire une relation de récurrence linéaire
2. Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 3$ et $4u_{n+2} = 12u_{n+1}-9u_n$.Méthode habituelle
3. Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $2u_{n+2} = u_{n+1}-u_n$.Méthode habituelle
4. Déterminer la suite u solution de la récurrence linéaire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1}+8u_n+9n^2$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ sachant qu'il existe une solution particulière de la forme $(an^2+bn+c)_n$.Une fois qu'une solution particulière est trouvée, toutes les autres sont de la forme : solution particulière + solution du problème homogène

Ex 21 **Polynômes interpolateur de Lagrange**

1. Déterminer le polynôme interpolateur de Lagrange de $f : x \mapsto \sin\dfrac{\pi x}{4}$ aux points $0,\dots,4$.

2. On note $L_1,\dots,L_n$ les polynômes de Lagrange de $1,\dots,n$.
   (a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.
   (b) Exprimer de deux manières l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour lequel $P(k) = k^{n-1}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
   (c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n$.