TD 23 : Variables aléatoires

Calculs de lois

Ex 1 Fait comme un rat

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre quatre portes dont l'une est dite « bonne » et les trois autres « mauvaises ». Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique, inoffensive mais désagréable et est ramené à son point de départ et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.

1. On suppose que le rat a une mémoire parfaite : à chaque nouvel essai il évite les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore essayées. Notons X la variable aléatoire réelle désignant le nombre d'essais effectués par le rat.
   Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et son écart-type.

2. On suppose que le rat n'a aucune mémoire : il choisit à chaque essai de façon équiprobable entre les quatre portes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Y de la façon suivante : si le rat choisit la bonne porte au bout d'un nombre d'essais au plus égal à n alors Y prend la valeur de ce nombre d'essais; si le rat n'a pas choisi la bonne porte au bout de n essais alors on pose $Y = 0$.
   Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance.

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On place dans un sac n jetons numérotés de 1 à n. On les tire du sac un par un. On obtient ainsi tous les entiers de 1 à n dans un certain ordre. On suppose que tous les ordres possibles sont équiprobables.
Nous dirons qu'il y a « coïncidence » au rang i si le i-ème jeton tiré porte le numéro i. Notons X_n la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de coïncidences.

1. Notons λ_p le nombre d'ordres ne comportant aucune coïncidence lorsque le nombre de jetons vaut p. Calculer λ_1, λ_2 et λ_3.
2. On se place dans le cas où $n = 4$.
   (a) Montrer que le nombre d'ordres comportant une seule coïncidence est $4\lambda_3$.
   (b) Quel est le nombre d'ordres comportant exactement deux coïncidences ?
   (c) Calculer λ_4 puis l'espérance de X_4.
3. Montrer que si le nombre de jetons vaut n alors le nombre d'ordres comportant exactement i coïncidences est $\binom{n}{i}\lambda_{n-i}$ avec la convention $\lambda_0 = 1$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}(X_n) = 1$.

Ex 3 Soit $n \geqslant 2$. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. Dans chacune d'elles il y a n boules numérotées de 1 à n indiscernables.

1. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le plus grand des numéros apparus sur les deux boules.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X. Décrire l'évenement $X = k$ comme l'union disjointe des événements $\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = i\}$ où $i \leq k$ et des évenements $\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}$ où $i < k$.
   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si on note $p_k = \mathrm{P}(X = k)$, vérifier que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.
   (c) Calculer $\mathrm{E}(X)$.

2. On tire au hasard deux boules simultanément dans l'urne U_1 et on note Y la variable aléatoire qui prend pour valeurs le plus grand des numéros apparus sur les deux boules.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   Il est plus simple de calculer $\mathrm{P}(Y \leq k)$: la probabilité que les deux boules tirées portent toutes les deux des numéros entre 1 et k. On en déduit ensuite $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(X \leq k) - \mathrm{P}(X \leq k-1)$

(b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Si on note $q_k = \mathrm{P}(Y=k)$, vérifier que $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$.

(c) Calculer $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \mathrm{P}(X=k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$$

Déterminer a puis calculer l'espérance et la variance de X.

Ex 5 Une urne contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. on s'arrête soit à l'obtention de la première boule blanche soit au n-ème tirage.
On désigne X la variable aléatoire qui prend pour valeurs soit le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche soit 0 si l'on obtient aucune boule blanche lors des n tirages.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $\mathrm{P}(X=k)$. Noter B_i l'événement : "la boule tirée lors du i^e est blanche. Montrer que $\{X=k\} = \bigcap_{i=1}^{k-1} \bar{B}_i \cap B_k$

2. Soit P la fonction polynôme définie par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. En calculant de manières différentes $P'(x)$, montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - \left(n+\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Images d'une variable aléatoire

Ex 6 On lance simultanément deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de probabilité de Z, son espérance et variance.

Ex 7 On considère un dé cubique truqué de telle que sorte la probabilité d'obtenir la valeur $k \in [\![1,6]\!]$ soit proportionnelle à k. Soit X la v.a.r. associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X et calculer $\mathrm{E}(X)$.Soit λ ce facteur de proportionnalité. Alors pour tout k; $\mathrm{P}(X=k) = \lambda k$ mais par ailleurs $\sum \mathrm{P}(X=k) = 1$ donc on en déduit la seule valeur possible pour k.

2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $\mathrm{E}(Y)$.

Couples de variables aléatoires réelles

Ex 8 Soit X la variable aléatoire dont la loi est définie par le tableau suivant

x_i	-1	0	1
$\mathrm{P}(X=x_i)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

1. Déterminer la loi du couple $V = (X, X^2)$.

2. Calculer la covariance des variables X et X^2. Que peut-on en déduire ? On s'aperçoit que la covariance peut être nulle même lorsque les variables ne sont pas indépendantes.

Ex 9 On considère le couple de variables aléatoires (X,Y) dont la loi est définie par le tableau suivant

XY	0	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0	0,1
3	0,1	0	0,2	0

1. Déterminer les lois marginales de X et Y. Cela revient à faire des sommes suivant les lignes / suivant les colonnes
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathrm{E}(X),\mathrm{E}(Y),\mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{V}(Y)$.
4. Déterminer les lois conditionnelles des variables $Y_{X=i}$ et $X_{Y=j}$.
5. Soit $U = XY$. Déterminer la loi de U
6. Soit $V = \inf(X,Y)$. Déterminer la loi de V.
7. Déterminer la loi conjointe de U et V.

Ex 10 Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n avec les probabilités

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(Y=k) = \frac{1}{n}$$

Calculer $\mathrm{P}(X=Y)$ et $\mathrm{P}(X \geqslant Y)$. Déterminer la loi de probabilités de $D = X - Y$. Décrire l'événement $X = Y$ comme l'union disjointe des événement $\{X=k\}\cap\{Y=k\}$. Décrire l'événement $X \geq Y$ comme lunion disjointe des événements $\{X=i\}\cap\{Y=j\}$ sur l'ensemble des couples (i,j) vérifiant $i \geq j$.

Ex 11 Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

1. On prélève successivement et avec remise n boules dans l'urne. Soit X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.
   (a) Pour tout $x \in [\![1,N]\!]$, calculer $\mathrm{P}(X \geqslant x)$ et en déduire la loi de X. L'événement $\{X \geq x\}$ est l'intersectionde tous les évenements $X_i \geq x$ car le minimum dépasse x ssi tous les X_i dépasse x. On utilise ensuite l'indépendance des X_i pour obtenir $\mathrm{P}(X_1 \geq x)^n$
   (b) Pour tout $y \in [\![1,N]\!]$, calculer $\mathrm{P}(Y \leqslant y)$ et en déduire la loi de Y.Idem, le max est inférieur à y ssi tous les X_i sont inférieurs à y donc on trouve $\mathrm{P}(X_1 \leq y)^n$
   (c) Pour tout $(x,y) \in [\![1,N]\!]^2$, calculer $\mathrm{P}((X>x)\cap(Y \leqslant y))$ et en déduire la loi du couple (X,Y).
   cet événement est impossible si $x \leq y$ sinon, cet évenement survient ssi tous les X_i sont compris entre $x+1$ et y on trouve donc $\mathrm{P}(X_1 \in [\![x+1, y]\!])^n = \left(\frac{y-x}{N}\right)^n$
2. Mêmes questions lorsque les tirages ont lieu simultanément et sans remise. Cette fois-ci, il y a équiprobabilité sur les parties à k éléments de 1 n. Il s'agira de dénombrer les cas favorables (par exemple un tirage de n boules toutes supérieures à x donc n parmi $N-x+1$) sur le nombre de cas totaux n parmi N