TD 22 : Espaces vectoriels de dimension finie

Familles libres, familles génératrices, bases

Ex 1 Pour tout $x \in]-1,1[$, on définit les fonctions f et g par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1. Montrer que (f,g) est une famille libre de $\mathscr{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$. Supposer que $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=0$ et évaluer en certains points pour obtenir finalement $a=b=0$
2. Montrer que $x \mapsto \dfrac{2}{x^2-1} \in \operatorname{vect}(f,g)$.Décomposer en éléments simples pour écrire cette fonction comme combinaison linéaire des deux premières

Ex 2 Montrer que les familles de fonctions suivantes sont des familles libres de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. $(x \mapsto e^{a_k x})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ avec (a_k) une suite strictement croissante. Supposer qu'il existe $(a_1,\dots,a_n)$ nous tous nuls tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $\sum a_k e^{a_k x} = 0$. Multiplier alors par $e^{a_{k_0} x}$ où k_0 est le plus grand indice k vérifiant $a_k \neq 0$, et étudier la limite
2. $(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Supposer que $\sum a_k \sin(kx) = 0$ pour tout x, multiplier par $\sin(k_0 x)$ et intégrer entre 0 et 2π : on en déduit la valeur de a_{k_0}
3. $(x \mapsto |x-\lambda|)_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Si $x \mapsto \sum a_k |x-\lambda_k|$ est la fonction identiquement nul, on peut montrer que pour tout k, la fonction $x \mapsto a_k|x-\lambda_k|$ est continue en λ_k ce qui permet de conclure

Ex 3 Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x-y+3z=0\}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathbb{R}^3$.
Considérer deux vecteurs $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ vérifiant ces deux égalités et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\lambda u + v \in F$ Interpréter géométriquement.Résoudre le système, caractériser les vecteurs de F à l'aide d'un seul paramètre : observer que tous ses vecteurs sont colinéaires Donner une base de F.

Ex 4 Les vecteurs $\vec{u}(0,1,1), \vec{v}(1,0,1)$ et $\vec{w}(1,1,0)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ en tant que $\mathbb{R}$-ev ? Comme cette famille est formée de 3 vecteur et que $3=\dim(\mathbb{R}^3)$ il suffit de montrer que cette famille est libre. Supposer donc que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ résoudre un système pour en déduire $a=b=c=0$

Ex 5 On appelle E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a\,\mathrm{sh}(x)+b\,\mathrm{ch}(x)+ce^x$
avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On montre que c'est un sous-ev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2. Déterminer une base de E. On sait que $(\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \exp)$ est une famille génératrice de E, est-elle libre ? Si ce n'est pas le cas, on peut tout de même en extraire une base

Ex 6 Parmi les familles de vecteurs suivantes indiquer celles qui sont libres, celles qui sont génératrices et celles qui sont des bases de E.

1. $E=\mathbb{R}^3$: $\vec{x_1}(2,-3,4), \vec{x_2}(1,-1,0), \vec{x_3}(1,0,1)$ et $\vec{x_4}(-1,2,-1)$. Libre : argument avce le nombre de vecteurs et la dimension. Génératrice : on peut par exemple trouver une sous-famille de 3 vecteurs qui est une base de $\mathbb{R}^3$
2. $E=\mathbb{R}_3[X]$: $P_1=X^3-1$, $P_2=X^3+2X^2-3X+1$ et $P_3=X^3+7X-1$. Génératrice : argument avec le nombre de vecteurs et la dimension. Libre : supposer $aP_1+bP_2+cP_3=0$ etrésoudre un système.

Ex 7 **Famille de polynômes**

1. **Polynômes échelonnés**
Soit $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(P_k)=k$. Montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Nombre d'éléments de la famille : $n+$, qui correspond à la dimension. Il suffit donc de montrer que la famille est libre : supposer que $a_0P_0+\dots+a_nP_n=0$, puis en déduire progresivement que $a_n=0$, puis $a_{n-1}=0$ etc.

2. **Formule de Taylor**
Montrer que $((X-1)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ puis exprimer les coefficients de P dans cette nouvelle base. $n+1$ éléents : il suffit de montrer que la famille est génératrice. Considérer $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et montrer qu'il existe des coefficients tels que $P=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(X-1)^k$

Calculs de dimensions

Ex 8 Soient F et G deux sous-$\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E tels que : $\dim(F)+\dim(G)>\dim(E)$.
Prouver que $F\cap G\neq\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$. Utiliser la formule de Grassman

Ex 9 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et déterminer leur dimension :

1. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x-2y+3z=0\}$ Tous vecteur de cet ensemble peut s'écrire à l'aide de deux paramètres, i.e. sous la forme $a\vec{u}+b\vec{v}$, on en dédiut que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de de cet ensemble
2. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x=2y=3z\}$ Ici, un seul paramètre suffit : cet ensemble est donc une droite
3. $\{P\in\mathbb{R}_4[X]\,|\,P(1)=0\}$ On pourra trouver une famille libre de 4 polynômes échelonnée en degré. Par ailleurs, cet ensemble n'est pas de dimension 5 (à justifier)
4. L'ensemble des fonctions dont la dérivée seconde est nulle. On en trouvera une base faisant intervenir deux fonctions
5. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y''+4y=0$ Résoudre l'EDL : toutes solutions se décrit à l'aide de deux paramètres, ce qui fournit une base de l'ensemble
6. $\operatorname{vect}(A,A^2,A^3)$ avec $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$. On connaît une famille génératrice, mais est-elle libre ?
7. $\Gamma=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\,\middle|\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$ Toute matrice de cet ensemble s'écrit sous la forme $aI+bJ+CK$, montrer que (I,J,K) en est une base
8. $\Delta=\left\{\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\,\middle|\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Même principe

Ex 10 Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\vec{x_1}=(1,-2,5,-3)$, $\vec{x_2}=(2,3,1,-4)$ et $\vec{x_3}=(3,8,-3,-5)$. Trouver une base et la dimension de W. La amille $(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3})$ est génératrice, si elle est libre, elle convient, sinon, on peut en extraire une base. Compléter la base de W en une base de $\mathbb{R}^4$.Appliquer l'algorithme en considérant la famille libre à compléter, et la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Ex 11 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$:

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,5x+y+z-t=0\}$$

$$G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x-z=0\ \text{ et }\ x+3y+2z+2t=0\}$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. On précisera pour chacun une base et sa dimension. On peut décrire les vecteurs de F à l'aide de 3 paramètres, ceux de G à l'aide de 2 paramètres.$\dim(F)=3$ et $\dim(G)=2$
2. Déterminer $F\cap G$. En donner la dimension et une base éventuelle. Déterminer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui satisfont les 3 équations
3. Déterminer la dimension de $F+G$. Conclure. Utiliser la formule de Grassman

---

Applications linéaires en dimension finie

Ex 12 Soient $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\(x,y,z)&\longmapsto&(x+y-z,2y-3z,2x+z)\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}_3[X]\\P&\longmapsto&P-(X+1)P'\end{array}$
Montrer que f et g sont des endomorphismes puis déterminer pour chacun leur noyau et leur image. Pour f, on détermine le noyau,

puis on utilise le théorème du rang, pour en déduire sans calcul son image.
Pour g : déterminer son noyau, vérifier que $\mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathbb{R}_2[X]$ puis conclure à l'aide du théroème du rang.

Ex 13 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on définit l'application linéaire f par :
$f(\vec{e}_1) = -\sqrt{2}\,\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \quad f(\vec{e}_2) = \sqrt{2}\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

1. Exprimer l'image par f de tout vecteur (x, y, z) dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. Commencer par déterminer le noyau, puis utiliser le théorème du rang pour conclure

Ex 14 **Expression analytique d'un projecteur**
Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}\,(1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.Montrer que $\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 1$, et F et G sont en somme directe
2. Déterminer une expression analytique du projecteur sur F parallèlement à G. Quel est le projeté de $\overrightarrow{u}\,(1,2,3)$? L'objectif est de décomposer un vecteur quelconque (x,y,z) sous la forme $(a, b, a+b) + \lambda(1,1,1)$. Résoudre ce système (attention, (x,y,z) est fixé, les inconnues sont a, b et λ)
3. En déduire une expression analytique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On peut utiliser le fait que $s = 2\,\mathrm{Id} - p$

Ex 15 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer l'inégalité

$$|\mathrm{rg}\,(f) - \mathrm{rg}\,(g)| \leqslant \mathrm{rg}\,(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$$

On montre que $\mathrm{Im}\,(f+g) \subseteq \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$, puis en appliquant la dimension ainsi que la formule de Grassman, on trouve l'inégalité de droite.
Pour l'inégalité de gauche, en exploitant la symétrie de l'énoncé (quitte à intervertir f et g) il suffit de montrer que $\mathrm{rg}\,(f) - \mathrm{rg}\,(g) \leq \mathrm{rg}\,(f+g)$ i.e que $\mathrm{rg}\,(f) \leq \mathrm{rg}\,(f+g) + \mathrm{rg}\,(g)$. On peut utiliser l'inégalité de droite (qu'on a au préalable démontré) pour justifier cela

Ex 16 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. $\ker(u) = \mathrm{Im}\,(u)$
2. $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad \dim(E) = 2\,\mathrm{rg}\,(u)$

Utiliser le théorème du rang pour $(1) \Rightarrow (2)$
Pour $(2) \Rightarrow (1)$ on montre tout d'abord que $\mathrm{Im}\,(u) \subseteq \ker(u) = \{0\}$ grâce à la première égalité, puis on utilise la deuxième égalité pour montrer que leurs dimensions sont égales (on utilise encore le théorème du rang)

Ex 17 Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $f^2 = \lambda f$. Justifier qu'il existe $\vec{u} \in E$ tel que $f(x) \neq 0_E$, utilise le théorème du rang pour montrer que $\mathbb{K}\vec{u}$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires. Tous les vecteurs de E s'écrivent donc $\vec{x} = a\vec{u} + \vec{v}$. Déterminer alors $f(\vec{x})$ et $f^2(\vec{x})$

Ex 18 **Endomorphisme nilpotent**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent d'indice p sur E, c'est-à-dire : $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Prouver l'existence d'un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{u}) \neq \vec{0}_E$ et $(\vec{u}, f(\vec{u}), f^2(\vec{u}), \ldots, f^{p-1}(\vec{u}))$ est libre dans E.
Considérer $\vec{u}$ tel que $f^{p-1}(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Supposer que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(\vec{u}) = \vec{0}$, appliquer f^{p-1} à cette égalité : cela permet d'en déduire $a_0 = 0$. Appliquer ensuite f^{p-2} : on en déduit $a_1 = 0$, et on itère ce procédé
2. En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. La famille libre obtenue dans la première question est formée de p vecteurs et est libre, donc $p \leq n$. Comme $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, montrer qu'on a également $0_{\mathscr{L}(E)}$