TD 21 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Sous-espaces vectoriels

Ex 1 Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants lesquels sont des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? (On s'aidera en interprétant les ensembles géométriquement)

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geqslant 0\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y = 1\}$.
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x+3y = 0\}$.
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2-2x+y^2 = 0\}$.
5. $E = \{re^{i\theta} \,|\, r \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]\}$. A) Pa stable par somme. B)Ne contient pas $(0,0)$. C) Oui : sous-ev de $\mathbb{R}^2$ D) Pas stable par somme E) Pas stable par somme (géométriquement : correspond à un secteur angulaire)

Ex 2 Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suivants, lesquels sont des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. Les ensembles A_1 et A_2 des suites respectivement croissantes et monotones. Pas stable par multiplication par un scalaire
2. L'ensemble B des suites bornées. Oui
3. L'ensemble C des suites périodiques. Oui
4. L'ensemble D des suites qui convergent vers 1. Pas stable par addition
5. L'ensemble E des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Oui : méthode habituelle pour montrer que c'est un sous-ev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (on n'est pas obligés de déterminer cet ensemble, on peut se contenter de raisonner avec deux suites qui sont solutions et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$)

Ex 3 Soit $F = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de F ?

1. $A = \{f \in F \,|\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0\}$
2. $B = \{f \in F \,|\, f \text{ dérivable et } f'(1) = 0\}$
3. $C = \{f \in F \,|\, f(0) = 1\}$
4. Les ensembles D_1 et D_2 des fonctions respectivement injectives et surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. $E = \{f \in F \,|\, f \text{ continue et } \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$
   1) Pas stable par multilplication par un scalaire
   2) Oui
   3) Pas stable par multilplication par un scalaire
   4) Ne contiennent pas $\tilde{0}$
   5) Oui

Ex 4 Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{D}$ respectivement les ensembles des suites complexes convergentes, convergeant vers 0 et constantes. Montrer que : $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \oplus \mathscr{D}$. Considérer l'intersection et montrer qu'elle est restreinte à $\{\tilde{0}\}$. Montrer également que toute suite convergente peut s'écrire comme somme d'une suite constante et d'une convergeant vers 0

Ex 5 Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-2y = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y+2z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Méthode habituelle
2. Sont-ils en somme directe ? Interpréter géométriquement les résultats précédents. Considérer l'intersection de ces deux plans : un triplet (x,y,z) appartient à l'intersection ssi il vérifie un système d'équation : cette intersection est dans ce cas une droite.

Ex 6 Soit $P_1 = \text{vect}\left((2,3,-1);(1,-1,-2)\right)$ et $P_2 = \text{vect}\left((3,7,0);(5,0,-7)\right)$. Montrer que $P_1 = P_2$.
Par double inclusion. Pour montrer que $P_2 \subseteq P_1$, il suffit de montrer que $(3,7,0) \in P_1$ et $(5,0,-7) \in P_1$ ce qui revient à exprimer ces vecteurs comme combinaisons linéaires des deux vecteurs engendrant P_1

Ex 7 Montrer que $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Application du cours

Ex 8 Montrer que $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Application du cours

Applications linéaires

Ex 9 Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{R}-$linéaires ?

(a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,y-z) \end{array}$ (b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$

1) Oui

(c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (1+X^2)P'+XP \end{array}$ (d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & {y'}^2+2y \end{array}$

2) Que vaut $f_2(\lambda x,\lambda y)$?
3) Oui 4) Que vaut $f_4(\lambda y)$?

Ex 10 Montrer que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires. Lesquelles sont également $\mathbb{C}$-linéaires ?

(a) $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \text{Re}\,(z) \end{array}$. Déterminer $\ker(g_1)$ et $\text{Im}\,(g_1)$ $\mathbb{R}i$ et $\mathbb{R}$

(b) $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & \lim\limits_{+\infty} u \end{array}$ où $\mathscr{C}$ désigne l'ensemble des suites complexes convergentes.

(c) $g_3 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

(d) $g_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y''-4y \end{array}$. Déterminer $\ker(g_4)$. Cela revient à résoudr eune EDo d'ordre 2

(e) $g_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\ker(g_5)$ Il s'agit d'exprimer l'ensemble des polynômes s'annulant en a $^e t$ $\text{Im}\,(g_5)$. Qui est donc un sous-ev de $\mathbb{R}$. Le quel ?

Ex 11 Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes, puis déterminer leurs noyaux et leurs images respectives.

(a) $h_1 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ (b) $h_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x-y,5x+4y) \end{array}$

(c) $h_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x,y,z,0) \end{array}$

Manipulations des noyaux et images

Ex 12 Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que $\text{Im}\,(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par f ssi f et p commutent.
Pour un projecteur, $x \in \text{Im}\,(p) \Leftrightarrow p(x) = x$

Ex 13 Soient $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $\text{Im}\,(g) \subset \ker(f)$. Considérer $y \in im(g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Calculer ensuite $f(y)$. Considérer $y = g(x)$. On a alors $f(y) = 0_E$

2. Que peut-on en déduire lorsque $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$? Montrer que $\mathrm{Id}_E - f \in GL(E)$. Composer avec $f + \mathrm{Id}_E$ Composer $f - \mathrm{Id}_E$ avec $f + \mathrm{Id}_E$

Ex 14 Soient $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$
2. Montrer que : $\ker(f) = \ker(g \circ f)$ l'inclusion directe est vraie même sans l'hypothèse.
   Pour l'inclusion réciproque, considérer $x \in E$ tel que $g(f(x)) = 0_E$, appliquer f à cette égalité et observer ce qui peut être simplifié
   et $\mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(g \circ f)$.L'inclusion réciproque est vraie même sans l'hypothèse.
   Pour l'inclusion directe, considérer $y = g(x)$, le but est de trouver $\tilde{x}$ tel que $y = g(f(\tilde{x}))$.

Ex 15 Soient $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.
2. Montrer qu'il y a égalité lorsque $\ker(f)+\ker(g) = E$.

Ex 16 Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\,(f)$.
2. Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{\vec{0}_E\} \iff \ker(f^2) = \ker(f)$.
3. Montrer que $E = \ker(f) + \mathrm{Im}\,(f) \iff \mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{Im}\,(f)$.

Ex 17 Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$, montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$.
2. Si $f^3 = \mathrm{Id}_E$, montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Ex 18 Montrer que les endomorphismes f et g suivants appartiennent à $\mathrm{GL}(E)$:
(a) $f^3 = f^2 + f + \mathrm{Id}_E$
(b) $g = p - a\,\mathrm{Id}_E$ avec $a \in \mathbb{K} \backslash \{0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}$ et p un projecteur de E

Ex 19 Soient $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev E tels que $f_i \circ f_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$ tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j$ et tels que $f_1 + \cdots + f_n = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $f_1, \ldots, f_n$ sont des projecteurs.
2. Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_i)$.