Espaces vectoriels et dimension

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 dimension d'un ev

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors

1. E admet une base finie
2. toutes les bases de E admettent le même nombre d'éléments. Ce dernier est appelé **dimension** de E et noté $\dim(E)$ ou s'il y a ambiguïté $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.
   On pose $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Proposition 2 Conséquence

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des vecteurs de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.
2. $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de E.
3. $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de E.

Proposition 3 Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors $\dim(E\times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Proposition 4 Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G deux sev de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G)$$

Proposition 5 Théorème noyau/image et Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec E de dimension finie et f est une application linéaire de E dans F.

- Si E' un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E, alors $f_{|E'}$ est un isomorphisme de E' dans $\mathrm{Im}\,(f)$.
- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec E de dimension finie. Si f est une application linéaire de E dans F alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}\,(f)$$

Proposition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
E et F sont isomorphes ssi $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 7 Équivalences de trois propositions

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.
Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est bijective de E dans F.
2. f est injective sur E.
3. f est surjective de E dans F.

Proposition 8 Théorème (Caractérisation géométrique des hyperplans)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On a équivalence entre

1. H est un hyperplan de E.
2. Il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = D \oplus H$.
3. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 9 Existence d'une loi de probabilités

$(x_k, p_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ caractérise la loi de probabilité d'une variable aléatoire ssi

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!], \, p_k \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \end{cases}$$

Proposition 10 Loi de probabilités de $Y = f(X)$

La loi de $Y = f(X)$ est $\mathrm{P}_Y : \begin{cases} Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ y & \mapsto & \mathrm{P}(Y = y) \end{cases}$ avec

$$\mathrm{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega) \,|\, y = f(x)} \mathrm{P}(X = x) = \sum_{k \,|\, y = f(x_k)} p_k$$

À savoir faire

- ☐ Utiliser le théorème du rang, la formule de Grassman
- ☐ Exprimer un sous-ev de $\mathbb{R}^n$ donné à l'aide d'équations, sous forme d'espaces engendré par une famille de vecteurs. En déduire la dimension d'un tel sous-espace (on appliquera la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à un système échelonné, s'il y a plus d'inconnues que d'équations, certaines peuvent "être passées en paramètres")
- ☐ Montrer qu'une famille de vecteurs est liée, ou libre
- ☐ Montrer qu'une famille est génératrice
- ☐ Montrer qu'une famille est une base, s'en servir pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel
- ☐ Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},E)$,...)
- ☐ Reconnaître un sous-espace affine d'un espace vectoriel et donner sa direction (exemple : ensemble des solutions d'un système linéaire, ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire)
- ☐ Savoir montrer qu'une fonction donnée est une application linéaire.
- ☐ Déterminer le noyau/ l'image d'une application linéaire. En déduire si elle est injective/ surjective.
- ☐ Reconnaître un projecteur : on calcule $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut f) f est alors le projecteur sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$. Idem avec les symétries : calculer $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut Id) et $\ker(f - \mathrm{Id})$ ainsi que $\ker(f + Id)$