

Espaces vectoriels

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est injective sur E si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

f est surjective de E dans F si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Proposition 2 Projecteur

Étant donnée la somme directe $E = F \oplus G$, on appelle **projecteur** (ou projection linéaire) sur F parallèlement à G l'application p définie par :

$$p : \begin{cases} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F \end{cases}$$

Connaître sans donner la démonstration : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$.
 f est alors le projecteur sur $F = \text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.

Proposition 3 Symétrie

Étant donnée la somme directe $E = F \oplus G$, on appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application s définie par :

$$s : \begin{cases} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F - x_G \end{cases}$$

Connaître l'équivalence des propositions suivantes, on demandera uniquement les démonstrations de $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (c)$ mais pas de $(c) \Rightarrow (a)$ Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1. s est une symétrie
2. $s^2 = \text{Id}_E$
3. $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est un projecteur qui est appelé projecteur associé à s .

s est donc la symétrie par rapport à $F = \text{Im}(p) = \ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $G = \ker(p) = \ker(s + \text{Id}_E)$.

Proposition 4 Propriétés

Soit X et Y deux familles non vides d'un \mathbb{K} -ev E .

Si $X \subset Y$ et Y libre dans E alors X est libre dans E .

Si $X \subset Y$ et X liée dans E alors Y est liée dans E .

Proposition 5 Base adaptée à une somme directe

Soient F et G deux sev de E .

Si F et G sont en somme directe et \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont respectivement des bases de F et G alors la concaténation de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 est une base de $F \oplus G$.

Une telle base est appelée **base adaptée** à la somme directe $F \oplus G$.

On en déduit $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

Proposition 6 Lemme (La démonstration est demandée avec une certaine indulgence)

Si $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille génératrice de E alors toute famille de $p + 1$ vecteurs est liée.

Proposition 7 Lemme et théorème de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -ev non nul

- Si (x_1, \dots, x_p) une famille libre, si $x_{p+1} \notin \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$ alors $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1})$ est libre aussi
- Si E est de dimension finie, alors toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E .

À savoir faire

- ☐ Montrer qu'une famille de vecteurs est liée, ou libre
- ☐ Montrer qu'une famille est génératrice
- ☐ Montrer qu'une famille est une base, s'en servir pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel
- ☐ Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence (\mathbb{K}^n , $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$, ...)
- ☐ Reconnaître un sous-espace affine d'un espace vectoriel et donner sa direction (exemple : ensemble des solutions d'un système linéaire, ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire)
- ☐ Savoir montrer qu'une fonction donnée est une application linéaire.
- ☐ Déterminer le noyau/ l'image d'une application linéaire. En déduire si elle est injective/ surjective.
- ☐ Reconnaître un projecteur : on calcule $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut f) f est alors le projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$. Idem avec les symétries : calculer $f \circ f$ (et vérifier que cela vaut Id) et $\ker(f - \text{Id})$ ainsi que $\ker(f + \text{Id})$

Ce qu'en dit le programme

Espaces vectoriels et applications linéaires

A - Espaces vectoriels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces vectoriels et b) Sous-espaces vectoriels (semaine 23)

c) Familles de vecteurs :

Famille (partie) génératrice.

Famille (partie) libre, liée.

Base, coordonnées.

Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre.

Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.

Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.

Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

d) Somme de deux sous-espaces Semaine 23

Applications linéaires : a) Généralités

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Noyau d'une application linéaire.

Caractérisation de l'injectivité.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.

Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Notations id_E , id .

Non commutativité si $\dim E \geq 2$.

Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.

Automorphismes. Groupe linéaire.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Notation $\text{GL}(E)$.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .