

# Espaces vectoriels

## Résultats et preuves à connaître

### Proposition 1 Théorème

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$f$  est injective sur  $E$  si et seulement si  $\ker(f) = \{0_E\}$ .

$f$  est surjective de  $E$  dans  $F$  si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .

### Proposition 2 Projecteur

Étant donnée la somme directe  $E = F \oplus G$ , on appelle **projecteur** (ou projection linéaire) sur  $F$  parallèlement à  $G$  l'application  $p$  définie par :

$$p : \begin{cases} E = F \oplus G & \rightarrow E \\ x = x_F + x_G & \mapsto x_F \end{cases}$$

Connaître sans donner la démonstration : Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $f$  est un projecteur si et seulement si  $f^2 = f$ .  $f$  est alors le projecteur sur  $F = \text{Im}(f)$  parallèlement à  $\ker(f)$ .

### Proposition 3 Symétrie

Étant donnée la somme directe  $E = F \oplus G$ , on appelle **symétrie** par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  l'application  $s$  définie par :

$$s : \begin{cases} E = F \oplus G & \rightarrow E \\ x = x_F + x_G & \mapsto x_F - x_G \end{cases}$$

Connaître l'équivalence des propositions suivantes, on demandera uniquement les démonstrations de  $(a) \Rightarrow (b)$  et  $(b) \Rightarrow (c)$  mais pas de  $(c) \Rightarrow (a)$  Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1.  $s$  est une symétrie
2.  $s^2 = \text{Id}_E$
3.  $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$  est un projecteur qui est appelé projecteur associé à  $s$ .

$s$  est donc la symétrie par rapport à  $F = \text{Im}(p) = \ker(s - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $G = \ker(p) = \ker(s + \text{Id}_E)$ .

### Proposition 4 Propriétés

Soit  $X$  et  $Y$  deux familles non vides d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ .

Si  $X \subset Y$  et  $Y$  libre dans  $E$  alors  **$X$  est libre dans  $E$** .

Si  $X \subset Y$  et  $X$  liée dans  $E$  alors  **$Y$  est liée dans  $E$** .

**Proposition 5** Base adaptée à une somme directe

Soient  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ .

Si  $F$  et  $G$  sont en somme directe et  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont respectivement des bases de  $F$  et  $G$  alors la concaténation de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est une base de  $F \oplus G$ .

Une telle base est appelée **base adaptée** à la somme directe  $F \oplus G$ .

On en déduit  $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

**Proposition 6** Lemme (La démonstration est demandée avec une certaine indulgence)

Si  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une famille génératrice de  $E$  alors toute famille de  $p+1$  vecteurs est liée.

**Proposition 7** Lemme et théorème de la base incomplète

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non nul

- Si  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille libre, si  $x_{p+1} \notin \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$  alors  $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1})$  est libre aussi
- Si  $E$  est de dimension finie, alors toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base finie de  $E$ .

**À savoir faire**

- Montrer qu'une famille de vecteurs est liée, ou libre
- Montrer qu'une famille est génératrice
- Montrer qu'une famille est une base, s'en servir pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel
- Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ( $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$ , ...)
- Reconnaître un sous-espace affine d'un espace vectoriel et donner sa direction (exemple : ensemble des solutions d'un système linéaire, ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire)
- Savoir montrer qu'une fonction donnée est une application linéaire.
- Déterminer le noyau/ l'image d'une application linéaire. En déduire si elle est injective/ surjective.
- Reconnaître un projecteur : on calcule  $f \circ f$  (et vérifier que cela vaut  $f$ )  $f$  est alors le projecteur sur  $\text{Im}(f)$  parallèlement à  $\ker(f)$ . Idem avec les symétries : calculer  $f \circ f$  (et vérifier que cela vaut  $\text{Id}$ ) et  $\ker(f - \text{Id})$  ainsi que  $\ker(f + \text{Id})$

# Ce qu'en dit le programme

## Espaces vectoriels et applications linéaires

### A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Espaces vectoriels et b) Sous-espaces vectoriels (semaine 23)</b>	
<b>c) Familles de vecteurs :</b>  Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée.  Base, coordonnées.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , $\mathbb{K}_n[X]$ , $\mathbb{K}[X]$ . Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ .

### d) Somme de deux sous-espaces Semaine 23

#### Applications linéaires : a) Généralités

Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.  Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de $E$ dans $F$ . Bilinéarité de la composition.  Caractérisation de l'injectivité.
---	--

#### b) Endomorphismes

Identité, homothéties. Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ .  Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$ , par $s^2 = \text{id}$ . Automorphismes. Groupe linéaire.  Si $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces de $E$ tels que $E = E_1 \oplus E_2$ , si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ , $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ , il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec $u_1$ sur $E_1$ et avec $u_2$ sur $E_2$ .	Notations $\text{id}_E$ , $\text{id}$ . Non commutativité si $\dim E \geq 2$ . Notation $vu$ pour la composée $v \circ u$ . Notation $u^k$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$ . On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $\text{GL}(E)$ . Notation $u^k$ pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$ .
---	--