

**DS n°8.****Durée : 4 heures**

**L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.**

**Si vous pensez avoir repéré une erreur dans le sujet, précisez le dans la marge et continuez de composer.**

**Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de sauter des lignes, tracer un trait lorsque vous changez d'exercice et de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.**

**La calculatrice est interdite. Bon courage !**

**Question de cours**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux familles de vecteurs telles que  $X \subset Y$ .

1. Si l'une des deux est libre (on précisera la quelle) on peut en déduire une propriété sur l'autre famille, et on démontrera cette propriété.
2. Si l'une des deux est liée (on précisera la quelle) on peut en déduire une propriété sur l'autre famille, et on démontrera cette propriété.

**Exercice 1 : Étude d'une fonction**

Pour  $x \in I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$ , on pose :  $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .
2. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en  $0$ . On notera toujours ce prolongement  $f$  dans la suite.
3. Déterminer le développement limité en  $0$  à l'ordre 2 de  $f$ .
4.  $f$  est-elle dérivable en  $0$ ? Le cas échéant, donner son nombre dérivé en  $0$ , l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $0$  ainsi que la position relative du graphe de  $f$  et de cette tangente au voisinage de  $0$ .

**Exercice 2 : Développement asymptotique d'une suite définie de façon implicite**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer qu'il existe un unique  $x \in \mathbb{R}_+$  tel que  $x\sqrt{1+\frac{x}{n}} = 1$ .  
Dans toute la suite de l'exercice, on note  $x_n$  l'unique réel positif tel que  $x_n\sqrt{1+\frac{x_n}{n}} = 1$ .
2. (a) Montrer que:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq 1$ .  
(b) En déduire que  $x_n \rightarrow 1$ .
3. (a) Montrer que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  où  $\alpha$  est une constante à déterminer.  
(b) Déterminer un équivalent de  $\ln(x_n)$ .
4. Déterminer une constante  $\beta \in \mathbb{R}$  telle que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Exercice 3**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On désigne par  $I_E$  l'endomorphisme identique sur  $E$ .  
On convient que  $u^0 = I_E, u^1 = u, u^2 = u \circ u$  et, pour tout entier naturel  $n, u^{n+1} = u \circ u^n$ .

1. Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .

- (a) Montrer que pour tout vecteur  $\vec{x}$  de  $\text{Im}(p)$ , on a :  $p(\vec{x}) = \vec{x}$ .
- (b) Montrer que les sous-espaces  $\ker(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

2. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ .

- (a) Si  $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , exprimer de deux façons différentes  $p \circ q \circ p$ .  
Montrer l'équivalence suivante :  $(p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}) \iff (p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)})$ .
- (b) En déduire que  $p + q$  est un projecteur ssi  $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
- (c) On suppose que  $p + q$  est un projecteur. Montrer que

$$\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q) \quad \text{et} \quad \text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$$

3. Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant la relation

$$(u - aId_E) \circ (u - bId_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

- (a) Montrer que  $p = \frac{1}{b-a}(u - aId_E)$  et  $q = \frac{1}{a-b}(u - bId_E)$  sont des projecteurs.
- (b) Calculer  $p + q$ .
- (c) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $u^n = a^n q + b^n p$ .
- (d) On suppose  $ab \neq 0$ . Montrer que  $u$  est inversible et que  $u^{-1} = \frac{1}{a}q + \frac{1}{b}p$ .

### Problème 1 : ensemble des solutions d'une équation différentielle

Notons  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .

#### I. Étude d'un sous-espace vectoriel de $E$

Soient  $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$ ,  $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$  et  $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Nous noterons  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  et  $G$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $\mathcal{B}$ .

Soient  $a, b$  et  $c$  des réels tels que  $af_1 + bf_2 + cf_3$  soit la fonction nulle. Nous allons voir trois méthodes pour en déduire que  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  (les trois méthodes sont indépendantes et permettent de répondre à la même question, l'objectif est donc d'employer des arguments différents en suivant la méthode préconisée)

1. *Méthode 1.* En observant que pour tout réel  $t$ ,  $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$  puis en choisissant (adroitement) trois valeurs de  $t$ , obtenez un système de trois équations aux trois inconnues  $a, b$  et  $c$ , que vous résoudrez.
2. *Méthode 2.* Reprendre la même question en exploitant le développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $af_1 + bf_2 + cf_3$  au voisinage de 0.
3. *Méthode 3.* En vous intéressant au comportement de  $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , vous pourrez également conclure.

#### II. Application aux équations différentielles

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle  $y''' = y$ , que nous noterons  $(\Sigma)$ . Une fonction solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(\Sigma)$  est une fonction  $f$  définie et trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'''(t) = f(t)$ .

1. Montrez que toute solution  $f$  de  $(\Sigma)$  est de classe  $C^\infty$ .
2. Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de  $(\Sigma)$ .

Notons  $T = D^3 - \text{Id}_E$ , où  $D^3 = D \circ D \circ D$ . Le noyau de  $T$  est donc l'ensemble des solutions réelles de  $(\Sigma)$ .

3. Montrez que  $G$  est contenu dans le noyau de  $T$ .

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi,  $G$  sera exactement l'ensemble des solutions de  $(\Sigma)$ . Soit  $f$  une solution réelle de  $(\Sigma)$  ; nous noterons  $g = f'' + f' + f$ .

4. Montrez que  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y' = y$ .
5. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' - y = 0$ .
6. Résolvez l'équation différentielle  $y'' + y' + y = 0$ .
7. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Décrivez l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = \lambda e^t$ .
8. Conclure.

## Problème 2 : Approximations de $\pi$ à l'aide de développements limités

Au dix-septième siècle, des mathématiciens comme Huyghens et Snellius (tous deux néerlandais) entreprirent de calculer des valeurs décimales approchées de  $\pi$  par des méthodes trigonométriques élémentaires. Il s'agissait d'améliorer la double inégalité classique  $\sin x < x < \tan x$  valable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  en introduisant des fonctions :

- Qui s'expriment simplement à l'aide des fonctions trigonométriques usuelles.
- Peu différentes de  $x$  au voisinage de 0.

Les fonctions  $f_1$  et  $f_4$  de l'énoncé sont celles de Snellius;  $f_2$  et  $f_3$  sont celles de Huyghens.

1. Soient  $a, b$  des réels positifs ou nuls. On pose  $m(a, b) = \frac{2a+b}{3}$  et  $g(a, b) = \sqrt[3]{a^2b}$ . Comparer  $m(a, b)$  et  $g(a, b)$  (i.e. trouver quelle est la plus grande de ces deux valeurs).
2. Dans toute la suite, on définit les fonctions suivantes sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}, & f_2(x) &= \frac{1}{3} (8 \sin \frac{x}{2} - \sin x) \\ f_3(x) &= \sqrt[3]{\sin^2 x \tan x}, & f_4(x) &= \frac{1}{3} (2 \sin x + \tan x) \end{aligned}$$

Calculer les développements limités en 0 de ces fonctions, à l'ordre 5.

3. En déduire l'existence de  $\eta > 0$  tel que :  $\forall x \in ]0, \eta[, f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$ .
4. On suppose ici que  $x$  appartient à  $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Quel est le signe de  $f_4(x) - f_3(x)$  ?
5. On pose  $u(x) = 3(2 + \cos x)(f_2(x) - f_1(x))$ . Linéariser  $u(x)$ .
6. Montrer que  $u'(x) = P(\cos \frac{x}{2})$ , où  $P$  est un polynôme de degré 4.
7. Factoriser  $P$ .
8. En déduire, pour  $x$  dans  $I$ , le signe de  $u'(x)$  puis celui de  $f_2(x) - f_1(x)$ .
9. On pose  $v(x) = x - f_2(x)$ . Montrer que  $v'(x) = Q(\cos \frac{x}{2})$ , où  $Q$  est un polynôme. En déduire, pour  $x$  dans  $I$ , le signe de  $v'(x)$  puis celui de  $v(x)$ .
10. On pose  $w(x) = f_3(x) - x$ . Calculer et factoriser  $w'(x)$ . En déduire, pour  $x$  dans  $I$ , le signe de  $w(x)$ . Quelle suite d'inégalités les questions 3 à 6 permettent-elles d'obtenir sur  $I$  ?
11. Seules les valeurs des fonctions trigonométriques de  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{6}$  sont supposées connues. Calculer des expressions simples de  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{\pi}{12}$  et  $\tan \frac{\pi}{12}$ . Faire de même avec  $\sin \frac{\pi}{24}$  à l'aide de radicaux superposés (i.e. en utilisant uniquement des symboles  $\sqrt{\dots}$  ou  $\sqrt[n]{\dots}$ ).
12. Calculer les expressions par radicaux de

$$X = 12f_2\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et de } Y = 12f_3\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En déduire un encadrement de  $\pi$ .