Problème 1

I. 1) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 / \forall t\in\mathbb{R},\ ae^{t}+be^{-t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt3}{2}\right) + ce^{-t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt3}{2}\right)=0$

En évaluant en $t=0$: $a+c=0$

En évaluant en $t=\frac{2}{\sqrt3}\pi$ (de sorte que $\frac{t\sqrt3}{2}=\pi$) on a

$$a e^{\frac{2}{\sqrt3}\pi} - c e^{\frac{1}{\sqrt3}\pi} = 0$$

et en $t=\frac{\pi}{\sqrt3}$ on a $a e^{\pi/\sqrt3} + b e^{-\frac{\pi}{2\sqrt3}} = 0$

On a donc

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ e^{\frac{2\pi}{\sqrt3}}a - e^{\pi/\sqrt3}c = 0 \\ e^{\pi/\sqrt3}a + e^{-\frac{\pi}{2\sqrt3}}b = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-e^{\frac{2\pi}{\sqrt3}}L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-e^{\pi/\sqrt3}L_1}}{\iff} \begin{cases} a + c = 0 \\ \left(-e^{\pi/\sqrt3}-e^{\frac{2\pi}{\sqrt3}}\right)c = 0 \\ -e^{\frac{\pi}{\sqrt3}}c + e^{-\frac{\pi}{2\sqrt3}}b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ On a $f_1(t) = 1+t+\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)$

$$f_2(t) = \left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+o(t^2)\right)\left(\frac{t\sqrt3}{2}+o(t)\right)$$

$$= \frac{t\sqrt3}{2} - \frac{t^2\sqrt3}{4} + o(t^2)$$

et $f_3(t) = \left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+o(t^2)\right)\left(1-\frac{\frac{3t^2}{4}}{2}+o(t^2)\right)$

$$= 1-\frac{3t^2}{8}-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+o(t^2) = 1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}+o(t^2)$$

B. 1

Donc $af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t) = (a+c) + \left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{c}{2}\right)t + \left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{c}{4}\right)t^2 + o_0(t^2)$

$$= 0$$

Ainsi, par unicité du DL :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{c}{2} = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{c}{4} = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{3}{2}c = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

3) On a $e^{-t/2} = o_{+\infty}(e^t)$ donc

$$af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t) = ae^t + o(1)$$

Or $af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t) = 0$

Donc $\boxed{a=0}$.

Donc $0 = 0e^t + e^{-t/2}\left(b\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$$0 = e^{-t/2} \times \sqrt{b^2+c^2} \times \underbrace{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t+\phi)\right)}$$

↳ vaut 1 pour certaines valeurs de t.

Ainsi $\sqrt{b^2+c^2}$ (l'amplitude) est nulle donc

$$\boxed{b=c=0}$$

B.2

II 1] Soit $\mathcal{P}(n)$ " f est n-fois dérivable "

où $f \in \Sigma$ et est 3 fois-dérivable.

Initialisation : comme f est 3-fois dérivable,

$\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.

Hérédité. soit $n \geq 3$, on suppose $\mathcal{P}(n)$.

Comme $f^{(3)} = f$ en dérivant $n-3$ fois (possible car f est n-fois dérivable)

On a $f^{(n)} = \underbrace{f^{(n-3)}}_{\text{3-fois dérivable}}$.

Donc $f^{(n)}$ est 3 fois dérivable, ie f est $(n+3)$ fois dérivable.

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+3)$

Conclusion : par récurrence triple, $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n-fois dérivable

ie $f \in \mathcal{C}^{\infty}$.

2] Soit P une fonction polynômiale solution de Σ.

On la suppose non-nulle et on note n son degré.

On a alors $\deg(P^{(3)}) \leq \deg(P) - 3$ (il y a : - soit égalité - soit $= -\infty$ si $\deg(P) < 3$)

Or $P^{(3)} = P$ donc $\underline{\deg(P) \leq \deg(P) - 3}$. Absurde.

Ainsi $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Réciproquement. $\tilde{0}^{(3)} = \tilde{0}$.

Donc $\tilde{0}$ est l'unique solution polynômiale de Σ

B.3

3) $f_1 : t \mapsto e^t$ donc $f_1' = f_1$ puis $f_1'' = f_1' = f_1$

et $f_1^{(3)} = f_1$. i.e $D^3(f_1) = id(f_1)$

d'où $(D^3 - id)(f_1) = 0_{E^\infty}$

Donc $\boxed{f_1 \in \ker(D^3 - id)}$

On remarque que $f_2(t) = e^{-t/2} \operatorname{Im}(e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}t})$

$= \operatorname{Im}\left(\exp\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t\right)$

$= \operatorname{Im}(e^{jt})$

Donc $f_2'(t) = \operatorname{Im}(j e^{jt})$

$f_2''(t) = \operatorname{Im}(j^2 e^{jt})$ et $f_2'''(t) = \operatorname{Im}(j^3 e^{jt})$

d'où $f_2'''(t) = f_2(t)$.

i.e $D^3 f_2 - id(f_2) = 0$

Ainsi $\boxed{f_2 \in \ker(D^3 - id)}$

Idem: $f_3(t) = \operatorname{Re}(\exp(jt))$ d'où $f_3^{(3)}(t) = \operatorname{Re}(j^3 e^{jt}) = f_3(t)$

Donc $f_3 \in \ker(D^3 - id)$.

Donc $\{f_1, f_2, f_3\} \subset \ker(T)$ qui est un sous-ev de E^∞.

Donc $\operatorname{vect}(f_1, f_2, f_3) \subset \ker(T)$

i.e $G \subset \ker(T)$

4) Comme $f \in \mathcal{C}^\infty$, g aussi et

$$\boxed{g' = (f''+f'+f)' = f^{(3)} + f'' + f' = f'' + f' + f = g}$$

$f^{(3)} = f$

5) $\{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / y' = y\} = \{t \mapsto Ae^t \, ; \, A \in \mathbb{R}\}$.
$= \text{vect}(f_1)$

6) L'E.C associée est

$$X^2 + X + 1 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4 = -3.$$

donc il y a 2 solutions complexes conjuguées :

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = j \text{ ou } \bar{j}$$

L'ensemble des solutions réelles est

$$\left\{ t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\boxed{= \text{vect}(f_2, f_3)}$$

7) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λ n'est pas racine de l'E.C on peut donc chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p : t \mapsto \alpha e^t. \qquad (y_p'' = y_p' = y_p)$$

y_p est solution ssi $3\alpha e^t = \lambda e^t$ i.e $\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{3}}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \frac{\lambda}{3}e^t + e^{-t/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \right.$

B.S

8] Soit f une solution de Σ, d'après II.4, g est solution de l'E.D.L $y' = y$

i.e $f'' + f' + f$ est de la forme $t \mapsto \lambda e^t$.

Donc $\exists\ \lambda \in \mathbb{R},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 /$

$$f = t \mapsto \frac{\lambda}{3} e^t + e^{-t/2}\left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

$$= \frac{\lambda}{3} f_1(t) + B f_2(t) + A f_3(t)$$

Donc $f \in \text{vect}(f_1, f_2, f_3) = G$

On a bien prouvé que toute solution de Σ appartient à G i.e $\ker(D^3 - id) \subset \Sigma$.

D'après II.3 l'autre inclusion est vraie

donc $\ker(D^3 - id) = G$ $\boxtimes$

Rem: dans $\mathbb{C}$, on aurait pu conclure:

$$\ker(D^3 - id) = \text{vect}\left(t \mapsto e^t;\ t \mapsto e^{jt};\ t \mapsto e^{j^2 t}\right)$$

or $1, j, j^2$ sont les racines de $X^3 - 1$

Cela signifierait donc

$$\ker(D^3 - id) = \ker(D - id) \oplus \ker(D - j\,id) \oplus \ker(D - j^2 id)$$

C'est le Lemme des noyaux

B