Colle 8 : intégrales et équations différentielles.

Preuves à connaître

Version allégée : pour les élèves ayant eu moins de 7/20 au dernier DS, les preuves des propositions 2, 5 et 7 ne sont pas exigibles (mais les résultats le sont) ainsi que les exercices 1 et 3.

Proposition 1 Formulaire pour intégrer des éléments simples

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \ln|x-a| + \lambda$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n} = \frac{\text{Cte}}{(x-a)^{n-1}} + \lambda \quad (n \geqslant 2)$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + \lambda \quad (a \neq 0)$$

$$\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + \lambda$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} \quad (n \geqslant 2) \quad \text{on pose } t = a\tan\theta \quad \text{soit} \quad \theta = \operatorname{Arctan}\frac{t}{a}$$

On ne demandera que le changement de variable à poser mais pas de poursuivre les calculs

$$\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} = \frac{\text{Cte}}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \lambda \quad (n \geqslant 2)$$

Exercice 1 Élément simple de seconde espèce d'ordre 4

Calculer $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^4}$ en posant $t = \tan\theta$ puis linéariser $\cos^6$ pour conclure.

Exercice 2 Règle de Bioche

Trouver une primitive de la fonction $\frac{1}{\sin}$ et préciser l'intervalle de validité.

Exercice 3 Règle de Bioche 2

Calculer $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2-\cos^2 t}$ (on précisera aussi l'intervalle de validité)

Proposition 2 Exemple de dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et $f = \exp(\varphi)$, définie sur I par $f(x) = \exp(\varphi(x))$.
Alors f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \varphi'(x)\exp(\varphi(x))$.

Proposition 3 Exemple 2

Soit a un nombre complexe non réel. Calculer $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a}$.

Proposition 4 Structure de l'ensemble des solutions (ordre 1 & ordre 2)

La solution générale de

$$(E) \quad y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$$

est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée $y'+ay=0$.
Même chose pour (E) $\quad ay''+by'+cy=g(x)$ dans ce cas l'équation homogène associée est $ay''+by'+cy=0$.

Proposition 5 Solution générale de l'équation homogène

$y'+ay=0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, y=\lambda e^{-A}$ avec A une primitive de a sur I.

Exercice 4 EDL 1 avec second membre

Résoudre $y'+\dfrac{t}{1+t^2}y=t$
Trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène, puis appliquer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière et conclure.

Proposition 6 Problème de Cauchy

Étant donnés $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'+ay=b \\ y(t_0)=\alpha \end{cases}$$

Proposition 7 Solution générale de l'équation homogène (cas complexe)

Si a,b,c sont complexes et $a \neq 0$,

	Solutions de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation homogène
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = -\dfrac{b}{2a}$	$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t)=(At+B)e^{\lambda_1 t}$

L'élève doit donner l'énoncé et montrer qu'en considérant des fonctions sous la forme $y : x \mapsto z(x)e^{\lambda x}$, celles-ci sont solutions ssi z vérifie $az''+(2a\lambda+b)z'=0$ ou alors (au choix de l'interrogateur) repartir de cette égalité pour aboutir au résultat final

À savoir faire

- ☐ Tous les exercices sur les calculs d'intégrales : IPP, changement de variable, passer en complexes si cela facilite le calcul (exemple pour $\int^x e^t \cos(t)dt$)
- ☐ Tous les exercices avec les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques

Le programme officiel

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\,dt$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Intégration par parties, changement de variable.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$. La démonstration de ce résultat est hors programme.