Colle 7 : Fonctions trigonométriques réciproques.

Preuves à connaître

Proposition 1 Propriétés des fonctions indicatrices

- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)$
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$

.

Proposition 2 Inclusion et indicatrice

Soit $(A,B) \in \mathscr{P}^2(E)$.

$$A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$$

Proposition 3 Fonction arccosinus

Donner la définition, valeurs remarquables ($0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ et leurs opposés) et dérivée (à savoir retrouver à partir du théorème de dérivation d'une fonction réciproque et du lemme). Donner le tableau de variation et le graphe (à représenter avec le graphe de la fonction cosinus)

Proposition 4 Fonction arcsinus

Même question, mais avec arcsinus

Proposition 5 Composées

- $\sin \circ \operatorname{Arcsin} = \cos \circ \operatorname{Arccos} = id_{[-1;1]}$
- $\operatorname{Arccos} \circ \cos$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais seulement sa restriction à $[0,\pi]$ vaut l'identité, elle est par ailleurs paire (ce qui permet d'obtenir son graphe sur $[-\pi;0]$ et 2π-périodique (ce qui permet de l'obtenir sur $\mathbb{R}$)) donner le graphe de $\operatorname{Arccos} \circ \cos$
- $\operatorname{Arcsin} \circ \sin$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais seulement sa restriction à $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vaut l'identité, et $\forall \theta \in [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ on a $\operatorname{Arcsin} \circ \sin(\theta) = \pi - \theta$. Par 2π-périodicité, on peut ensuite donner le graphe de $\operatorname{Arcsin} \circ \sin$

Proposition 6 Lemme

$\forall x \in [-1,1]$,

$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \text{ et } \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Proposition 7 Fonction arctangente

Donner la définition et la dérivée (à savoir retrouver à partir du théorème de dérivation d'une fonction réciproque). Donner le tableau de variation et le graphe (à représenter avec le graphe de la fonction tangente).

Proposition 8 Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 9 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 10 Changement de variables

Soit f continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur J telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Proposition 11 Intégrale et parité

Soit $a > 0$ et f continue sur $[-a,a]$.

Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Proposition 12 Intégrale et périodicité

Soit $T > 0$ et f continue et T-périodique. Alors

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f = \int_a^b f$ (invariance par translation)
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f = \int_0^T f$ (intégrale sur une période)

Exercice 1 Intégrales de Wallis -1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n.

Exercice 2 Intégrales de Wallis -2

Montrer, en utilisant la relation de récurrence $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ que $\forall n \in \mathbb{N}$, , $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Les volontaires pourront aussi prouver que $I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

À savoir faire

- ☐ Pas d'exercices sur le chapitre "primitive" cette semaine
- ☐ Exercices avec les fonctions indicatrices
- ☐ Retrouver des arcsinus de la forme $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{107\pi}{4}\right)\right)$ ou des arccosinus de la même forme.
- ☐ Tous les exercices avec des fonction trigonométriques réciproques
- ☐ Déterminer une image directe (tableau de variation, utiliser le TVI)
- ☐ Déterminer une image réciproque (tableau de variation)
- ☐ Déterminer si une fonction donnée est injective, surjective ou bijective.
- ☐ Déterminer la réciproque lorsqu'elle est bijective.

Le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Applications et relations (de "Raisonnement et vocabulaire ensembliste")	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
~~Relation d'ordre. Ordre partiel, total.~~	
d) Fonctions usuelles	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan. Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. .Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\,dt$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Intégration par parties, changement de variable.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.