DS n°3.

Durée : 2 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Question de cours

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n.

Question indépendantes

1. Calculer $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{123\pi}{4}\right)\right)$
2. Montrer que $2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}$.
3. L'application
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$
est-elle injective ? Surjective ? (il faut justifier)
4. L'application
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$$
est-elle injective ? Surjective ? (il faut justifier)
5. L'application
$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 \end{array} \right.$$
est-elle injective ? Surjective ? (il faut justifier)
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 1

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$

1. f est-elle injective ? Surjective ? (Les réponses doivent être justifiées)
2. Déterminer $f([0,3])$.
3. Déterminer un ensemble $J \subseteq \mathbb{R}$ tel que $g : \begin{cases} [-1,1] \to J \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ soit une bijection.
4. Calculer, pour tout $y \in J$, la valeur de $f^{-1}(y)$
5. Calculer l'image réciproque : $f^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$

Exercice 2

1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
   Montrer que f est injective sur E si et seulement si f est surjective de E dans E.

2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
   Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 3

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Le but de cet exercice est d'obtenir une expression simplifiée de la fonction g.

1. Pour tout x réel, on pose $u = \text{Arctan}(x)$ et $f(u) = g(\tan(u)) = g(x)$. Montrer que

$$\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, f(u) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sin(u)+\cos(u)}{\sqrt{2}}\right)$$

2. Simplifier l'expression de f.