DS n°2.

durée : 4 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Équations et inéquations

1. Résoudre l'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
2. Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geqslant 1/2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $z^4 = -16$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
5. Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

1. Linéariser $\cos(\theta)^6$
2. En déduire $\int_0^{2\pi} \cos(x)^6\, dx$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)^6$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{e^{3x}-7}{e^{2x}+4}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer les images par f de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$, dont on précisera l'équation. Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote ?

Exercice 3

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. A tout point M d'affixe $z\neq 0$, on associe le point M' d'affixe

$$z'=-\frac{1}{\overline{z}}$$

Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A passant par O.

1. Exprimer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$. Interpréter géométriquement cette égalité.

2. Démontrer que $\overline{z'+1}=\dfrac{z-1}{z}$.

3. On suppose que M appartient au cercle C privé de O

   (a) Justifier que $|z-1|=1$.

   (b) Démontrer que $|z'+1|=|z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

   (c) En déduire une construction géométrique du point M' connaissant le point M. Faire une figure.

Exercice 4

Une construction du pentagone régulier

On pose $z_0=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right),\alpha=z_0+z_0^4,\beta=z_0^2+z_0^3$ et pour tout $k\in[\![\,0,4\,]\!]$, A_k est le point d'affixe z_0^k dans le plan complexe.

1. Montrer que les points A_0,A_1,A_2,A_3 et A_4 sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique et qui a pour isobarycentre O (rappel : l'isobarycentre est le point dont l'affixe est la moyenne des affixes des 5 sommets)

2. Calculer $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$, puis en déduire que α et β sont solutions d'une équation du second degré à coefficients réels, que l'on précisera.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

4. On note H le point d'intersection de $[A_1A_4]$ avec l'axe des abscisses, $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ passant par B d'affixe i, M et N les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses (M étant supposé d'abscisse positive).

   (a) Montrer que $\overline{OH}=\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

   (b) Montrer que $\overline{OM}=\alpha,\overline{ON}=\beta$ et que H est le milieu de $[OM]$.

5. En déduire une construction simple, à la règle (non graduée) et au compas, d'un pentagone régulier dont on connaît le centre et un sommet.

Problème

Soit f et g les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \operatorname{ch}(x)^{\frac{1}{x}}$$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2. Etude des limites de f

   (a) Montrer que $f(x) = \dfrac{x+\ln(1+e^{-2x})-\ln(2)}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

   (b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   (c) Montrer l'égalité suivante puis en déduire les limites de f en 0^+ et 0^- :

   $$f(x) = \frac{\ln(1+(\operatorname{ch}(x)-1))}{\operatorname{ch}(x)-1} \times \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{x^2} \times \frac{x}{\operatorname{ch}(x)+1}$$

3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

4. Déterminer l'ensemble de définition de g et justifier que g est dérivable sur ce dernier.

5. Calculer les limites de g en chacune des bornes de son ensemble de définition et interpréter géométriquement chacun des résultats.

6. Calculer $g'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de g.

7. Etude du taux d'accroissement en 0^+ et 0^-.

   (a) Vérifier que : $\dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{\exp\left(\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x}\right)-1}{\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x}} \times \dfrac{f(x)}{x}$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-1}{x}$. Que peut-on en déduire géométriquement sur $\mathscr{C}_g$?

8. Donner des valeurs approchées de e et $\dfrac{1}{e}$ à 10^{-1} près par défaut. Tracer $\mathscr{C}_g$ en tenant compte de tout ce qui a été démontré précédemment.