Devoir maison n°2

Exercice 1

Démontrer la formule

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 2

Démontrer la formule suivante

$$\forall x\in\left]0,1\right],\ 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\operatorname{Arcsin}(2x-1)=\frac{\pi}{2}$$

Problème

On appelle cotangente hyperbolique la fonction coth définie par

$$\coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

I. Étude de coth

1. Continuité et limites
   (a) Préciser l'ensemble de définition D de coth, puis étudier sa continuité et sa dérivabilité.
   (b) Étudier la parité de coth.
   (c) Montrer que pour tout $x\in D$, $\coth(x)=\dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.
   (d) En déduire les limites de coth aux bornes de D. Quelles conséquences géométriques peut-on en tirer sur la courbe représentative Γ de coth ?

2. Étude des variations
   (a) Calculer la dérivée de coth et étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variations.
   (c) Donner une allure de Γ.

II. Étude de Argcoth

1. Existence et continuité
   (a) Montrer que coth admet une bijection réciproque de E dans D, où E est un ensemble à préciser. Cette fonction est appelée argument cotangente hyperbolique et notée Argcoth.
   (b) Montrer que Argcoth est continue sur E. Étudier sa parité.

2. Etude des variations
   (a) Justifier que Argcoth est dérivable sur E.
   (b) Montrer que $\coth' = 1-\coth^2$ puis en déduire la dérivée de Argcoth.
   (c) En déduire les variations de Argcoth sur E.
   (d) Donner les limites de Argcoth aux bornes de E. Quelles conséquences géométriques peut-on en tirer quant à la courbe représentative Δ de Argcoth ?
   (e) Dresser le tableau de variations de Argcoth et donner une allure de Δ dans le même repère que Γ. Quelle propriété géométrique y a-t-il entre les deux courbes ?

3. Formulation logarithmique
   Montrer que pour tout $x\in E$, $\operatorname{Argcoth}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$