Corrigé du DS n°3.

Durée : 2 heures

Question de cours

Pour tout entier n on a
$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\cos^2(t))\,\mathrm{d}t = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^n(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$
$= I_n - (\left[\frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t)$. Puisque $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{^pi}{2}) = 0$, le crochet est nul, on obtient ainsi

$$I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1}I_n$$

et donc

$$(1 + \frac{1}{n+1}I_{n+2}) = I_n$$

i.e.

$$\frac{n+2}{n+1}I_{n+2} = I_n$$

finalement

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$$

Question indépendantes

1. $\mathrm{Arccos}\,(\cos(\frac{123\pi}{4})) = \mathrm{Arccos}\,(\cos(\frac{120\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})) = \mathrm{Arccos}\,(\cos(30\pi + \frac{3\pi}{4}))$ Puisque cosinus est 2π-périodique et que 30π est un multiple de 2π, on obtient $\mathrm{Arccos}\,(\cos(\frac{3\pi}{4}))$, or $0 \leq \frac{3\pi}{4} \leq \pi$ donc $\mathrm{Arccos}\,(\cos(\frac{3\pi}{4})) = \frac{3\pi}{4}$

2. Montrons que $2\,\mathrm{Arccos}\,(\frac{3}{4}) = \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{8}$.
D'une part on a $\cos(2\,\mathrm{Arccos}\,\frac{3}{4}) = 2\cos^2(2\,\mathrm{Arccos}\,\frac{3}{4}) - 1 = 2\times(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{18}{16} - 1 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, mais cela n'est pas suffisant pour que cet angle soit bien $\mathrm{Arccos}\,(\frac{1}{8})$: il reste encore à prouver qu'il s'agit bien d'un angle entre 0 et π.
Puisque $0 \leq \frac{3}{4} \leq 1$ et que arccosinus est décoirssante, on a $\mathrm{Arccos}\,(0) \geq \mathrm{Arccos}\,(\frac{3}{4}) \geq \mathrm{Arccos}\,(1)$ i.e. $\frac{\pi}{2} \geq \mathrm{Arccos}\,(\frac{3}{4}) \geq 0$ cela prouve bien que $0 \leq 2\,\mathrm{Arccos}\,(\frac{3}{4}) \leq \pi$, et puisque son cosinus vaut $\frac{1}{8}$ on en déduit que

$$2\,\mathrm{Arccos}\,(\frac{3}{4}) = \mathrm{Arccos}\,(\frac{1}{8})$$

3. L'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

n'est pas injective puisque $\sin(0) = \sin(\pi)$ (car ces deux valeurs sont nulles).
De plus, 2 n'a pas d'antécédent par f puisque f est majorée par 1, donc f n'est pas surjective.

4. L'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$$

est-elle injective ? Surjective ?
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui soit un antécédent par g de (a,b) :
$g(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y = a \\ -2y = b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$

Ainsi, tout couple de $\mathbb{R}^2$ admet exactement un antécédent par g, cela prouve qu'elle est bijective (donc injective et surjective)

5. L'application
$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 \end{array} \right.$$
est-elle injective ? Surjective ? (il faut justifier)

On a $h(1) = h(j)$ puisque $j^3 = 1$, donc h n'est pas injective.
D'autre part, on sait que chaque complexe non nul admet exactement trois racines cubiques dans $\mathbb{C}$ (en effet, le complexe $z = re^{i\theta}$ admet les antécédents $\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta}{3}}$, $\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}}$ et $\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}}$) et le complexe 0 en admet un, donc h est surjective.

6. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}\, x + 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{\pi}{2}$.
On introduit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Arctan}\, x + 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \end{cases}$: elle est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout réel x, $1+x^2 \geq 0$ et que arctangente est définie sur $\mathbb{R}$. Elle y est de plus dérivable en tant que somme d'une fonction dérivable avec une composée de fonctions dérivables. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2\left(\left(\frac{1}{2} \times 2x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)\right) \frac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}$ donc $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)\right) \frac{1}{1+1+x^2+x^2-2x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + 2\left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) \frac{1}{2+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})}$
Or $\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)-x(1+x^2)} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)} = \frac{-1}{1+x^2}$ Cela donne donc $f'(x) = 0$. Puisque la dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle, on en déduit que f y est constante. Donc pour tout réel x on a
$$f(x) = f(0) = \text{Arctan}\,(0) + 2\,\text{Arctan}\,(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 1

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$

1. On fait l'étude de la fonciton : comme le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ donc est du même signe que $1-x^2$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	-1	↗	1	↘	0

En utilisant le TVI, on obtient que $\frac{1}{2}$ admet un antécédent sur l'intervalle $[-1,1]$ et un autre sur $[1,+\infty[$, donc f n'est pas injective.
Par ailleurs, f est majorée par 1, donc 2 n'admet pas d'antécédent : f n'est donc pas surjective.

2. $f([0;3]) = f([0;1]) \bigcup f([1;3]) = [f(0);f(1)] \bigcup [f(3);f(1)] = [0;1] \bigcup [f(3);1] = [0;1]$

3. En utilisant le théorème de la bijection sur l'intervalle $[-1;1]$ pour la fonction f qui y est continue et strictement croissante, on obtient que $f([-1;1])$ est un intervalle, qui est encore $[-1;1]$ et que f réalise une bijection de $[-1;1]$ vers $[-1;1]$.

4. Soit $y \in [-1;1]$ on résout $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y$ il s'agit d'une équation du second degré SAUF lorque $y = 0$ (et dans ce cas l'unique solution est 0). Si $y \neq 0$ alors $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2) \geq 0$ car $y \in [-1;1]$. et les deux solutions sont $\frac{2 \pm \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$. Parmi ces deux solutions, une seule a une valeur absolue plus petite que 1 (et

fait donc partie de $[-1;1]$) et l'autre a une valeur absolue supérieure strictement à 1. Or parmi les deux valeurs obtenus, on sait que

$$\left|\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right| = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{|y|} \geq \frac{\left|1-\sqrt{1-y^2}\right|}{|y|} = \left|\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right|$$

donc parmi les deux solutions, celle dont la valeur absolue est la plus petite est celle avec le symbole -. On a donc $\forall y \in [-1;1]\setminus\{0\}, f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ et $f^{-1}(0) = 0$

5. Déterminons $f^{-1}([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$, pour cela, trouvons les 2 antécédents de $\frac{1}{2}$ D'après le calcul précédent, $\frac{1}{2}$ admet deux antécédents : $\frac{1-\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}{\frac{1}{2}} < \frac{1+\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}{\frac{1}{2}}$ i.e. $2\left(1\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = 2\pm\sqrt{3}$ D'après le tableau de variation, f ne prend des valeurs supérieures strictement à $\frac{1}{2}$ qu'entre ces deux valeurs, donc $f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 2-\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{3}, +\infty\right[$.

Par imparité de la fonction, on obtient $f(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -2-\sqrt{3}\right] \cup \left[-2+\sqrt{3}, +\infty\right[$.
Et donc $f(x) \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left(\left]-\infty, 2-\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{3}, +\infty\right[\right) \cap \left(\left]-\infty, 2-\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{3}, +\infty\right[\right)$
Ainsi, $\boxed{f^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = \left]-\infty, -2-\sqrt{3}\right] \cup \left[-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{3}, +\infty\right[}$

Exercice 2

1. $[\Longrightarrow]$ $\forall y \in E$, on cherche $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Or $f(y) = f(f(f(y)))$ donc $y = f(f(y))$ car f est injective sur E.
Il suffit donc de poser $x = f(y) \in E$, donc $\boxed{f \text{ est surjective de } E \text{ dans } E.}$

$[\Longleftarrow]$ $\forall (x_1,x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Comme f est surjective de E dans E, $\exists(\alpha_1,\alpha_2) \in E^2, x_1 = f(\alpha_1)$ et $x_2 = f(\alpha_2)$
et $\exists(\beta_1,\beta_2) \in E^2, \alpha_1 = f(\beta_1)$ et $\alpha_2 = f(\beta_2)$
Finalement $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f(f(f(\beta_1))) = f(f(f(\beta_2))) \Longrightarrow f(\beta_1) = f(\beta_2) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$
$\Longrightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
Donc $\boxed{f \text{ est injective sur } E}$.

2. • Injectivité de f
$\forall (x_1,x_2) \in E^2$,
$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow (f\circ g\circ f)(x_1) = (f\circ g\circ f)(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ car $f\circ g\circ f$ est injective sur E.

• Surjectivité de f
$\forall y \in F, \exists \alpha \in E, y = (f\circ g\circ f)(\alpha)$ car $f\circ g\circ f$ est surjective de E dans E.
d'où $y = f(g(f(\alpha))) = f(x)$ en posant $x = g(f(\alpha)) \in E$.

• De plus, $g = f^{-1}\circ(f\circ g\circ f)\circ f^{-1}$ donc g est une bijection de E dans E par composition de bijections.

Conclusion : $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont bijectives de } E \text{ dans } E}$.

Exercice 3

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Le but de cet exercice est d'obtenir une expression simplifiée de la fonction g.

1. $\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, f(u) = g(\tan(u)) = \text{Arcsin}\left(\frac{1+\tan(u)}{\sqrt{2}\sqrt{1+\tan^2(u)}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{\cos^2(u)}(1+\tan(u))}{\sqrt{2}}\right)$
   $= \text{Arcsin}\left(\frac{|\cos(u)|\,(1+\tan(u))}{\sqrt{2}}\right)$.
   Or $\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(u) > 0$ donc $|\cos(u)| = \cos(u)$
   soit $\boxed{\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, f(u) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sin(u)+\cos(u)}{\sqrt{2}}\right)}$

2. De plus, $\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(u)+\cos(u) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(u) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(u)\right) = \sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)$
   d'où, $\boxed{\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, f(u) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\right)}$
   • Si $-\frac{\pi}{2} < u \leqslant \frac{\pi}{4}$ alors $-\frac{\pi}{4} < u+\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $f(u) = u+\frac{\pi}{4}$ par définition de la fonction arcsin.
   • Si $\frac{\pi}{4} \leqslant u < \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{\pi}{2} < u+\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4} \leqslant \pi - \left(u+\frac{\pi}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$
   donc $f(u) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\pi - \left(u+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \pi - \left(u+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} - u$.
   Conclusion : $\boxed{f(u) = \begin{cases} u+\frac{\pi}{4} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < u \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} - u & \text{si } \frac{\pi}{4} \leqslant u < \frac{\pi}{2} \end{cases}}$