Corrigé du devoir maison n°2

Exercice 1

Démontrer la formule

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 1

Posons $A=\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

Alors $\tan(A)=\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\right)\right)=\frac{\frac{1}{2}+\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\right)}{1-\frac{1}{2}\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\right)}$

Or, $\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\right)=\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{8}}=\frac{1}{3}$ d'où $\tan(A)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1=\tan\frac{\pi}{4}$

Donc $A=\frac{\pi}{4}+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$

$\frac{1}{2},\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{8}$ sont dans $]0,1[$ donc $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$, $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$ et $\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$ sont dans $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ comme arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où, $0<A<\frac{3\pi}{4}$ soit $0<\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{3\pi}{4}\iff-\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$. Comme $k\in\mathbb{Z}$, on a $k=0$.

Conclusion : $\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}}$

Exercice 2

Démontrer la formule suivante

$$\forall x\in]0,1],\ 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\operatorname{Arcsin}(2x-1)=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x)=2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\operatorname{Arcsin}(2x-1)$.

• f est définie ssi $x\neq0$ et $\frac{1-x}{x}\geqslant0$ et $2x-1\in[-1,1]$ ssi $\boxed{x\in]0,1]}$

f est continue sur $]0,1]$ car $x\mapsto\sqrt{x}$, arctan et arcsin sont continues sur leurs ensembles de définition.

• Etude de la dérivabilité : $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc $x\mapsto\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ est dérivable ssi $\frac{1-x}{x}\neq0$ $\iff x\neq1$.

De même, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ donc $x\mapsto\operatorname{Arcsin}(2x-1)$ est dérivable ssi $2x-1\neq0$ et $2x-1\neq-1$ $\iff x\neq1$ et $x\neq0$.

On en déduit alors que f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x\in]0,1[$,

$f'(x)=2\times\frac{1}{2}\left[\frac{-x-(1-x)}{x^2}\right]\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\times\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}+2\times\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=-\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\times x+\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

d'où $f'(x)=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=0$, donc f est constante sur $]0,1[$ et par continuité sur $]0,1]$.

Pour tout $x\in]0,1]$, $f(x)=f(1)=2\operatorname{Arctan}(0)+\operatorname{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x\in]0,1],\ 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\operatorname{Arcsin}(2x-1)=\frac{\pi}{2}}$

Problème

On appelle cotangente hyperbolique la fonction coth définie par

$$\coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

Problème

I. Étude de coth

1. Continuité et limites

(a) coth est définie ssi $e^x \neq e^{-x}$. Or $e^x = e^{-x} \iff e^{2x} = 1 \iff x = 0$.

Donc coth est définie ssi $x \neq 0$ et $\boxed{D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[}$.

coth est dérivable et donc continue sur D par composition de fonctions dérivables sur D.

(b) D est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D$, $\coth(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x} = -\coth(x)$ donc

$\boxed{\text{coth est impaire}}$.

(c) Pour tout $x \in D$, $\coth(x) = \dfrac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x\left(1-e^{-2x}\right)} = \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$ et $\coth(x) = \dfrac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

(d) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \coth(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.
La droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \coth(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = -1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.
La droite (Δ') d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to0^+} \coth(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1-e^{-2x}\right) = 0^+$ car $e^{-2x} \leqslant 1$ pour $x \geqslant 0$.

$\lim\limits_{x\to0^-} \coth(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^-} \left(1-e^{-2x}\right) = 0^-$ car $e^{-2x} \geqslant 1$ pour $x \leqslant 0$.
L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe en 0.

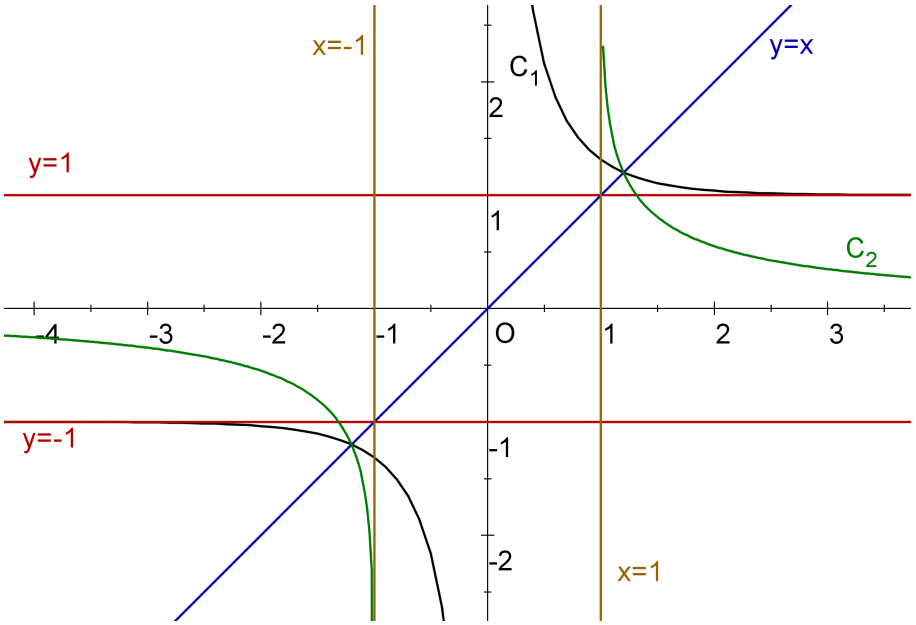
2. Étude des variations

(a) Pour tout $x \in D$, $\coth'(x) = -\dfrac{4}{(e^x-e^{-x})^2} < 0$

(b) Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\coth'(x)$	$-$		$\|\|$	$-$	
coth	-1	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	1

(c) Courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$:



II. Étude de argcoth

1. Existence et continuité

(a) coth est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, c'est donc une bijection de $]-\infty,0[$ dans $]-\infty,-1[$ et de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$. Elle admet donc une bijection réciproque de $]-\infty,-1[$ dans $]-\infty,0[$ et de $]1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ notée argcoth. Cette fonction est donc définie de $E=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^*$.

(b) D'après le théorème de la bijection, argcoth est continue sur E.

Montrons que argcoth est impaire : remarquons d'abord que E est centré en 0.
Pour tout $x\in E$, il existe $y\in\mathbb{R}^*$ tel que $x=\coth(y)\iff y=\operatorname{Argcoth}(x)$.
d'où $\operatorname{Argcoth}(-x)=\operatorname{Argcoth}(-\coth(y))=\operatorname{Argcoth}(\coth(-y))$ comme coth est impaire
soit $\operatorname{Argcoth}(-x)=-y=-\operatorname{Argcoth}(x)$. Donc argcoth est impaire

2. Etude des variations

(a) coth est dérivable sur D et $\coth'<0$ sur D donc argcoth est dérivable sur E

(b) Pour tout $x\in D$, $1-\coth^2(x)=1-\dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}=-\dfrac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$ donc $\coth'=1-\coth^2$.

De plus, pour tout $x\in E$, $\operatorname{Argcoth}'(x)=\dfrac{1}{\coth'(\operatorname{Argcoth}(x))}=\dfrac{1}{1-\coth^2(\operatorname{Argcoth}(x))}$

donc $\operatorname{Argcoth}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

(c) Pour tout $x\in E$, $\operatorname{Argcoth}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}<0$ donc argcoth est décroissante sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$

(d) Comme argcoth est strictement décroissante de $]-\infty,-1[$ dans $]-\infty,0[$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{Argcoth}(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}\operatorname{Argcoth}(x)=-\infty$.

De même, on obtient que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \text{Argcoth}\,(x) = 0}$ et $\boxed{\lim_{x\to1^+} \text{Argcoth}\,(x) = +\infty}$.

$\mathscr{C}_2$ présente donc deux asymptotes verticales d'équation $x = 1$ et $x = -1$ et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

(e) Tableau de variations

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\text{argcoth}'(x)$	$-$		‖		‖	$-$	
argcoth	0 ↘	$-\infty$	‖		‖	$+\infty$ ↘	0

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Formulation logarithmique

Pour tout $x \in D$, $y = \coth(x) \iff y = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \iff e^{2x}(y-1) = y+1$

$\iff e^{2x} = \dfrac{y+1}{y-1} > 0$ car $|y| = |\coth(x)| > 1$

$\iff x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)$.

Comme $\begin{cases} y = \coth(x) \\ x \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{Argcoth}\,(y) \\ y \in E \end{cases}$, on en déduit par unicité de la fonction réciproque de coth que

$$\boxed{\text{pour tout } x \in E,\ \text{Argcoth}\,(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$