Corrigé du DS n°2.

Durée : 4 heures

Équations et inéquations

1. Résoudre l'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
   Posons $X = e^x$. Alors l'équation devient $X^2 - X - 6 = 0$. Les racines de cette équation sont $X = -2$ et $X = 3$. Mais seule la racine positive nous intéresse ici, car l'exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. On en déduit que l'équation admet une unique racine, qui est égale à $\ln 3$.

2. Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geqslant 1/2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a $\sin(x) \geqslant 1/2 \iff x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

   Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a le même résultat : $\sin(x) \geqslant 1/2 \iff x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

   Finalement, par 2π -périodicité, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) \geqslant 1/2 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$.

3. Résoudre l'équation $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   On sait que $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x) \iff x + \frac{\pi}{4} = 2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x + \frac{\pi}{4} = -2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   En résolvant individuellement chacune de ces deux équations, on trouve que l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Résoudre l'équation $z^4 = -16$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   On écrit $-16 = 16e^{i\pi}$ en posant $r = |z|$ et θ un argument de z l'équation devient $(re^{i\theta})^4 = -16 \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta \equiv \pi[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$

   $\begin{cases} r = 2 \\ \theta \equiv \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}] \end{cases}$. On a donc 4 solutions

   $$\mathcal{S} = \{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\} = \{\sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i\} = \{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i\}$$

5. Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   On utilise l'amplitude, qui vaut $A = \sqrt{3+1} = 2$ et donc
   $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2(\cos(\frac{\pi}{6})\cos(x) + \sin(\frac{\pi}{6}\sin(x)) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$ Ainsi, l'équation devient $2\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$,
   $\Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow (x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi])$ ou $(x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]) \Leftrightarrow (x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi])$ ou $(x \equiv \frac{-\pi}{6}[2\pi])$

   $$\mathcal{S} = \left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \bigcup \left(\left\{\frac{-\pi}{6}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$

Exercice 1

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(\theta)^6 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^6 = \frac{e^{6i\theta}+6e^{4i\theta}+15e^{2i\theta}+20+15e^{-2i\theta}+6e^{-4i\theta}+e^{-6i\theta}}{64} = \frac{\cos(6\theta)+6\cos(4\theta)+15\cos(2\theta)+10}{8}$

2. On a $\int_0^{2\pi}\cos(x)^6\,dx = \frac{1}{32}\int_0^{2\pi}(\cos(6x)+6\cos(4x)+15\cos(2x)+10)\,dx = \frac{1}{32}\left[\frac{\sin(6x)}{6}+\frac{6\sin(4x)}{4}+\frac{15\sin(2x)}{2}+10x\right]_0^{2\pi} = \frac{20\pi}{32} = \frac{5\pi}{8}$ En effet, sinus s'annule en 0 et en tous les multiples de 2π

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)^6 = \frac{1}{32}\left(\sum_{k=0}^n \cos(6k\theta)+6\cos(4\theta)+15\cos(2k\theta)+10\right)$ or, lorsque sauf cas particuliers, on a
   $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\cos(\frac{n}{2}\theta)$ donc sauf cas particuliers on a

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)^6 = \frac{1}{32}\left(\frac{\sin(3(n+1)\theta)}{\sin(3\theta)}\cos(3n\theta)+6\frac{\sin(2(n+1)\theta)}{\sin(2\theta)}\cos(2n\theta)+15\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\cos(n\theta)+10(n+1)\right)$$

   il y a des valeurs particulières lorsque $\theta \equiv 0[\pi]$: dans ce cas, on remplacera le 3eme terme(celui dont le dénominateur est $\sin(\theta)$) terme par (n+1)
   lorsque $\theta \equiv 0[\frac{\pi}{2}]$: dans ce cas, on remplacera le 2eme terme (celui dont le dénominateur est $\sin(2\theta)$) terme par (n+1)
   lorsque $\theta \equiv 0[\frac{\pi}{3}]$: dans ce cas, on remplacera le 1er terme (celui dont le dénominateur est $\sin(3\theta)$) terme par (n+1)

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{e^{3x}-7}{e^{2x}+4}\right)$.

1. Pour tout réel x on a $e^{2x}+4 > 0$ donc la fraction $\frac{e^{3x}-7}{e^{2x}+4}$ est du même signe que $e^{3x}-7$ i.e. positive si et seulement si $x > \frac{\ln(7)}{3}$

2. $f(\ln(2)) = \ln\left(\frac{8-7}{4+4}\right) = -\ln(8) = -3\ln(2)$
   $f(\ln(3)) = \ln\left(\frac{27-7}{9+4}\right) = \ln(20)-\ln(13)$

3. On a pour tout $x > \ln(7)/3$, $f(x)-x = \ln\left(\frac{e^{3x}-7}{e^{2x}+4}\right)-\ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^{3x}-7}{e^x(e^{2x}+4)}\right) = \ln\left(\frac{e^{3x}-7}{e^{3x}+4e^x}\right) = \ln\left(\frac{1-7e^{-3x}}{1+4e^{-2x}}\right)$ Comme le numérateur et le dénominateur de la fraction tendent chacun vers 1 dans la dernière fraction, on a $\lim_{x\to\infty}\frac{1-7e^{-3x}}{1+4e^{-2x}} = 1$ et par continuité de ln en 1 on obtient $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-7e^{-3x}}{1+4e^{-2x}}\right) = 0$ Ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. De plus, puisque $1-7e^{-3x} < 1+4e^{-2x}$ la dernière fraction est inférieure à 1 et donc son logarithme est négatif. Ainsi, $f(x) < x$ donc la courbe se trouve sous son asymptote.

Exercice 3

1. $\arg(z') = \arg\left(-\frac{1}{\overline{z}}\right) \equiv \pi + \arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\ [2\pi] \equiv \pi - \arg(\overline{z})\ [2\pi]$ donc $\boxed{\arg(z') \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]}$

   On en déduit que $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \pi[2\pi] \iff \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \pi[2\pi]$ donc $\boxed{O \in]MM'[}$

2. $z'+1 = -\frac{1}{\overline{z}} + 1 = \frac{-1+\overline{z}}{\overline{z}}$ d'où $\boxed{\overline{z'+1} = \frac{z-1}{z}}$

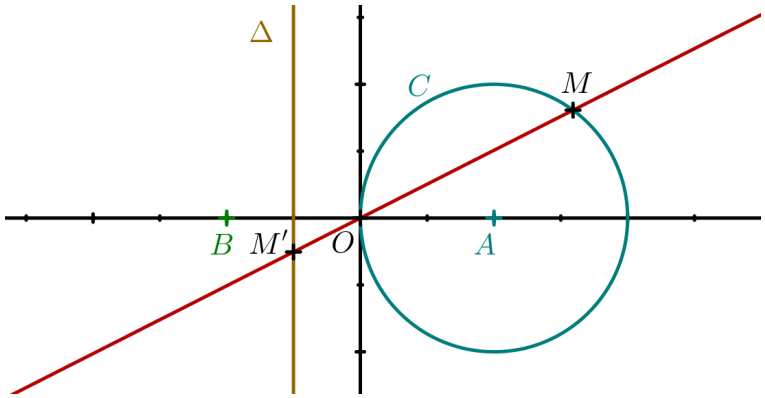
3. (a) $M \in \mathcal{C}$ donc $AM = 1$ soit $\boxed{|z-1| = 1}$

   (b) $|z'+1| = \left|\frac{z-1}{z}\right| = \frac{|z-1|}{|z|} = \frac{1}{|z|}$ et $|z'| = \left|-\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{1}{|\overline{z}|} = \frac{1}{|z|}$ donc $\boxed{|z'+1| = |z'|}$

   $|z'+1| = |z'| \iff BM' = OM' \iff$ $\boxed{M' \text{ appartient à la médiatrice de } [OB]}$

   (c) Construction

   D'après 1, $M' \in (OM)$ et, d'après 3.b, M' appartient à la médiatrice (Δ) de $[OB]$. Donc M' est le point d'intersection de (OM) et (Δ).



Exercice 4

Une construction du pentagone régulier

1. Les z_0^k sont les racines cinquièmes de l'unité donc A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.
   Leur somme est nulle, car $\sum_{k=0}^{4} z_k = \sum_{k=0}^{4} z_0^k = \dfrac{1-z_0^5}{1-z_0} = 0$.
   On a alors $\sum_{k=0}^{4} \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{0}$ donc O est l'isobarycentre du pentagone.

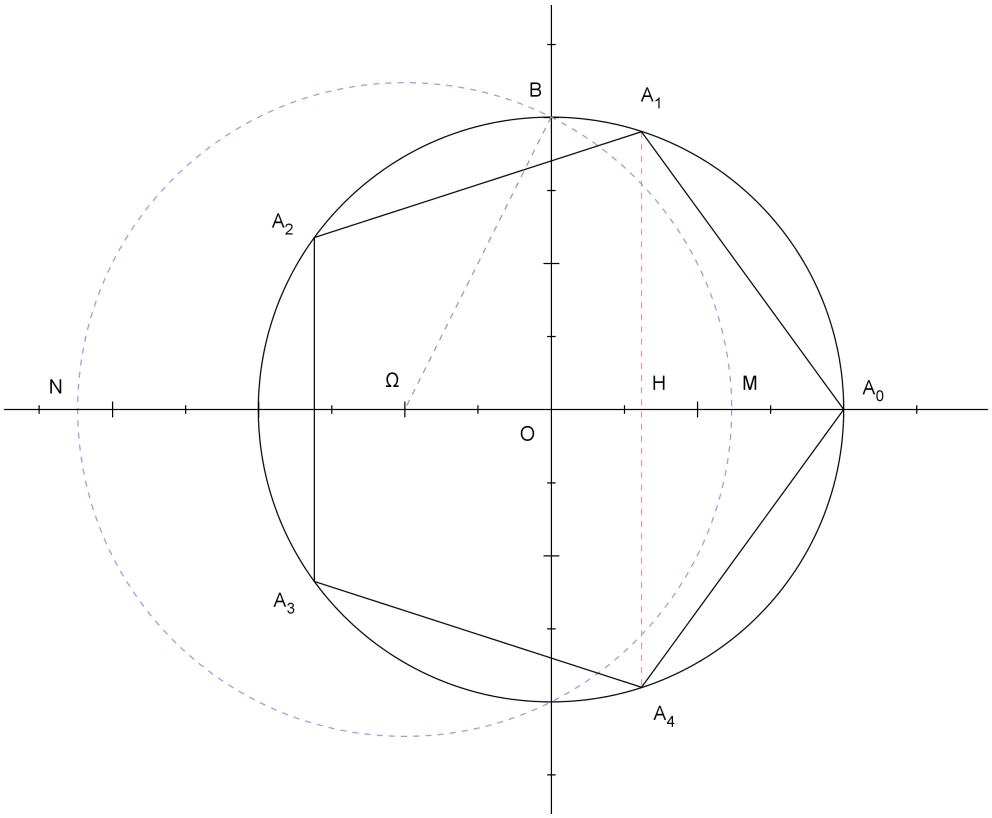
2. $\alpha+\beta = z_0+z_0^4+z_0^2+z_0^3 = -z_0^0$ d'après la question précédente donc $\boxed{\alpha+\beta=-1}$
   $\alpha\beta = (z_0+z_0^4)(z_0^2+z_0^3) = z_0^3+z_0^4+z_0^6+z_0^7 = z_0^3+z_0^4+z_0+z_0^2$ car $z_0^k = z_0^{k-5}$ car $z_0 \in \mathbb{U}_5$, soit $\boxed{\alpha\beta=-1}$
   Donc α et β sont les solutions de l'équation $\boxed{z^2+z-1=0}$

3. $\Delta = 5$ donc les solutions sont $z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$.
   Or $\alpha = z_0+z_0^4 = z_0+z_0^{-1} = z_0+\overline{z_0} = 2\,\mathrm{Re}(z_0) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$
   et $\beta = z_0^2+z_0^3 = z_0^2+z_0^{-2} = z_0^2+\overline{z_0^2} = 2\,\mathrm{Re}(z_0^2) = 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$
   Comme $0 < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{4\pi}{5} < \pi$ et que cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, on a $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) < \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et donc $\beta < \alpha$,
   soit $\alpha = z_2$ et $\beta = z_1$. D'où, $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ et $\boxed{\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}}$.

4. (a) Comme le pentagone est centré en O et symétrique par rapport à (Ox), le triangle OA_1A_4 est isocèle en O et $(OH) \perp (A_1A_4)$. Donc H est le pied de la hauteur issue de O c'est donc le milieu de $[A_1A_4]$ d'où $z_H = \dfrac{z_0+z_0^4}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$
   soit $\boxed{\overline{OH} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)}$

   (b) $M(z) \in (C) \cap (Ox) \iff \left|z+\dfrac{1}{2}\right| = \left|i+\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $z+\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R} \iff z+\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ou $z+\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
   $\iff z = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$ ou $z = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0$
   Donc $z_M = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $z_N = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ soit $\boxed{\overline{OM} = \alpha}$ et $\boxed{\overline{ON} = \beta}$.
   Le milieu de $[OM]$ a pour affixe $\dfrac{0+z_M}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = z_H$ donc $\boxed{H \text{ est le milieu de } [OM]}$

5. Pour construire à la règle et au compas le pentagone régulier, connaissant A_0 et O, il suffit de construire le point H qui permettra de placer le point A_1.
   • On construit tout d'abord le cercle de centre O et de rayon OA_0 ainsi que la droite (OA_0). On en déduit le point B et le point A_0', diamétralement opposé à A_0.
   • On construit alors la médiatrice de $[OA_0']$ qui donne le point Ω. On peut alors tracer le cercle (C) et on obtient le point M. Il suffit alors de reporter au compas la longueur OM pour placer H.
   • On construit alors au compas la parallèle passant par H à (Oy) en créant un rectangle ayant $[OH]$ pour côté. On en déduit alors par intersection les points A_1 et A_4.
   • Les points A_2 et A_3 s'obtiennent en reportant au compas la longueur de la corde $[A_0A_1]$ sur le cercle trigonométrique.


B
A_1
A_2
N
Ω
H
M
A_0
O
A_3
A_4

Problème

1. ch est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ch >0 donc ln ch est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x} = \dfrac{\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)}{x} = \dfrac{\ln\left(e^x(1+e^{-2x})\right) - \ln(2)}{x}$
soit $\boxed{f(x) = \dfrac{x+\ln(1+e^{-2x}) - \ln(2)}{x}}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-2x}) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[1 + \dfrac{\ln(1+e^{-2x}) - \ln(2)}{x}\right]$ soit
$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)}{x} = \boxed{\dfrac{-x+\ln(1+e^{2x}) - \ln(2)}{x}}$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-2x}) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[-1 + \dfrac{\ln(1+e^{2x}) - \ln(2)}{x}\right]$ soit
$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1}$.

(c) • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x} = \dfrac{\ln(1+(\operatorname{ch}(x)-1))}{\operatorname{ch}(x)-1} \times \dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{x}$
$= \dfrac{\ln(1+(\operatorname{ch}(x)-1))}{\operatorname{ch}(x)-1} \times \dfrac{(\operatorname{ch}(x)-1)(\operatorname{ch}(x)+1)}{x} \times \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)+1}$
$= \dfrac{\ln(1+(\operatorname{ch}(x)-1))}{\operatorname{ch}(x)-1} \times \dfrac{\operatorname{ch}^2(x)-1}{x} \times \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)+1}$
d'où, $\boxed{f(x) = \dfrac{\ln(1+(\operatorname{ch}(x)-1))}{\operatorname{ch}(x)-1} \times \dfrac{\operatorname{sh}^2(x)}{x^2} \times \dfrac{x}{\operatorname{ch}(x)+1}}$
• $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+(\operatorname{ch}(x)-1))}{\operatorname{ch}(x)-1} = 1$ car $\lim\limits_{u\to0^+} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\operatorname{sh}^2(x)}{x^2} = 1$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$
On en déduit par opérations sur les limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0}$
De même, on obtient que $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0}$

3. $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{x\operatorname{th}(x) - \ln(\operatorname{ch}x)}{x^2}}$ qui est du signe de $\varphi(x) = x\operatorname{th}(x) - \ln(\operatorname{ch}x)$.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \dfrac{x}{\operatorname{ch}^2(x)}$ qui est du signe de x.
φ est donc décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$, elle admet donc un minimum en $x=0$ qui est $\varphi(0)=0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geqslant 0$.
On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0}$.

4. Par définition $g(x) = \exp\left(\dfrac{\ln(\operatorname{ch}x)}{x}\right)$ donc d'après la question 1. et les théorèmes généraux, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$

5. D'après la question 2. et par composition de limites,
• $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)} = e}$ et la droite d'équation $y=e$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.
• $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{f(x)} = \dfrac{1}{e}}$ et la droite d'équation $y = \dfrac{1}{e}$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$.

- $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{f(x)} = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{f(x)} = 1}$ donc le point $(0,1)$ est un point limite de $\mathscr{C}_g$ en 0.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{g'(x) = f'(x)e^{f(x)}}$ donc du signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e

7. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{e^{f(x)}-1}{x} = \dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)} \times \dfrac{f(x)}{x}$ d'où $\boxed{\dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{\exp\left(\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}\right)-1}{\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}} \times \dfrac{f(x)}{x}}$

   (b) $\dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{\exp\left(\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}\right)-1}{\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}} \times \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\exp\left(\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}\right)-1}{\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}} \times \dfrac{\ln(1+(\mathrm{ch}(x)-1))}{\mathrm{ch}(x)-1} \times \dfrac{\mathrm{sh}^2(x)}{x^2} \times \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)+1}$
   d'après la question 2. (c).
   D'où, par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{1}{2}}$.
   On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une tangente en le point limite $(0,1)$ de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

8. $\boxed{e \simeq 2,7}$ et $\boxed{\dfrac{1}{e} \simeq 0,3}$ car $\dfrac{5}{2} < e < 3$ d'où $0,3 < \dfrac{1}{3} < e < 0,4$.

