Colle 2 : Trigonométrie / Techniques fondamentales en calcul algébrique.

Preuves à connaître

Proposition 1 (Formules de Cramer)

On considère le système suivant

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

(S) est de Cramer si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ (c'est le déterminant de (S)).

Proposition 2 Classes d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

• Pour tout $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x (modulo $\mathscr{R}$) l'ensemble

$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \,|\, x \mathscr{R} y\}$$

• Les classes d'équivalences modulo $\mathscr{R}$ forment une partition de E c'est-à-dire qu'elles sont non vides, que leur réunion est E et qu'elles sont deux à deux égales ou disjointes.

Proposition 3 Angles opposés, complémentaires, différent de $\frac{\pi}{2}$, de π et supplémentaires

Pour les fonctions cosinus, sinus et tangentes, exprimer $f(-x)$, $f(\frac{\pi}{2}-x)$, $f(\frac{\pi}{2}+x)$, $f(\pi+x)$, $f(\pi-x)$ en fonction de $\cos(x), \sin(x)$ et $\tan(x)$, un dessin sera attendu pour justifier les résultats.

Proposition 4 Formules trigonométriques

Démontrer géométriquement les formules suivantes

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \text{ et } \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Proposition 5 Autres formules trigonométriques

Savoir retrouver les formules pour $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$ à partir de la proposition 4.

Proposition 6 Valeurs particulières

Connaître et savoir jusitifier la valeur des cosinus, sinus et tangente des angles, $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Proposition 7 Formules d'arc moitié

On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Sous réserve d'existence des différentes quantités, on a

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

(On pourra pour cela utiliser les résultats des propositions 4 et 5)

Proposition 8 Graphiques

Savoir représenter sur un même graphique les graphes des fonctions sinus, cosinus et tangente : représenter leurs tangentes en 0 et préciser la position relative du graphe par rapport à cette tangente.

À savoir faire

- ☐ Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir des fonctions trigonométriques
- ☐ Déterminer si une relation binaire donnée est une relation d'équivalence ou non.
  Déterminer la classe d'équivalence d'un élément le cas échéant.
- ☐ Résoudre un système linéaire. Déterminer l'ensemble des solutions, l'écrire sous la forme : solution particulière + ensemble des solutions du système homogène associé.
- ☐ Raisonnements par analyse et synthèse ; par disjonction de cas ; par l'absurde ; par contraposition.
- ☐ Récurrence simple, double et forte pour établir qu'une propriété est vraie pour tout entier supérieur à n_0.
- ☐ Calculer une somme en utilisant la linéarité et les sommes fondamentales, ou en remarquant une somme télescopique. Exprimer un produit simple à l'aide de puissances et de la factorielle.

Le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.