Colle 5 : Nombres complexes et trigonométrie.

Preuves à connaître

Proposition 1 Propriétés

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ pour tout $z_2 \neq 0$

Proposition 2 Inégalité triangulaire

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

si $z_1 \neq 0$, on a égalité ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, z_2 = \lambda z_1$

Proposition 3 Démontrer à partir de la définition de $e^{i\theta}$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, tout $\theta' \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{Z}$,

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ et $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$.

Proposition 4 Formules de transformation de somme en produit

$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ $\quad \cos p - \cos q = 2\sin(\frac{q-p}{2})\sin(\frac{p+q}{2})$

$\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ $\quad \sin p - \sin q = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$

Exercice 1 Linéarisation

Linéariser $\cos^4(\theta)$.

Exercice 2 Délinéarisation

Exprimer $\sin(5\theta)$ sous le forme d'un polynôme en $\sin\theta$

Proposition 5 Calcul de sommes

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$, calculer $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

Proposition 6 Proposition (Arguments et opérations)

$\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \forall n \in \mathbb{Z}$

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ [2\pi]$

Proposition 7 Recherche des racines carrées (Méthode exponentielle)

Si $a \neq 0$, on met a et z sous forme trigonométrique et on aboutit au système

$$z^2 = a \iff \begin{cases} |z| = \sqrt{|a|} \\ \arg(z) \equiv \dfrac{\arg(a)}{2} \ [\pi] \end{cases} \iff z = \pm\sqrt{|a|}e^{i\frac{\arg(a)}{2}}$$

Exercice 3 Recherche des racines carrées (Méthode algébrique)

Trouver les racines carrés de $-16+30i$. Indication à donner : calculer 17^2

Proposition 8 Trinôme cas complexe

Soient a,b et c trois complexes avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(*) \quad az^2+bz+c=0$$

On pose $\Delta = b^2-4ac = \delta^2$ (δ étant une racine carrée de Δ) appelé **discriminant de l'équation**.

- Si $\Delta \neq 0$, $(*)$ admet deux solutions distinctes : $\frac{-b\pm\delta}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, $(*)$ admet une solution double $-\frac{b}{2a}$

Proposition 9 Relations coefficients-racines

z_1 et z_2 sont solutions de $az^2+bz+c=0$ si et seulement si $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$.
Autrement dit toute équation de degré 2 s'écrit sous la forme

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$$

où est σ_1 la somme des solutions et σ_2 leur produit.

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire l'ensemble des complexes z qui vérifient $z^n = 1$.

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]\}$$

être capable de déterminer les ensembles $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$ en les décrivant à l'aide de $1, i$ et j.

À savoir faire

- ☐ Utiliser la formule de Moivre pour transformer une expression de la forme $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en un polynôme en $\cos\theta$ ou $\sin\theta$.
- ☐ Utiliser les formules d'Euler pour linéariser une expression de la forme $\cos^k(\theta)$ ou $\sin^k(\theta)$
- ☐ Calculs élémentaires avec des complexes : additions, produits et quotients sous forme algébrique, produits, quotients et puissances sous forme trigonométrique, passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement.

Le programme officiel

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.	

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe: $e^z = e^{\Re(z)} e^{ß\Im(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2ß\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.