DS n°1.

durée : 3 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
Si vous pensez avoir repéré une erreur dans le sujet, précisez le dans la marge et continuez de composer.
Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Question de cours

Soit $n \in \mathbb{N}$, rappelez (sans démonstration) la valeur des quantités $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Énoncez la formule permettant de calculer $\sum_{k=1}^{n} k^3$, puis démontrez ce résultat (de la manière de votre choix).

Proche du cours

1. Résoudre l'équation $2x+3 = |x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

   $$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

   Montrer que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^n + 3^n$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de la somme

   $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simple des produits

   $$A_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3} \quad \text{et} \quad B_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 1 : une équation fonctionnelle

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation :

$$(E) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

1. Quel raisonnement est adapté pour résoudre ce type de problème?
2. Soit f une fonction vérifiant l'équation (E).
   (a) Quelle(s) valeur(s) peut prendre $f(0)$?
   (b) On suppose que $f(0) = 0$. En évaluant l'équation (E) en des réels bien choisis, montrer que $0 = 1$.
   (c) On suppose que $f(0) \neq 0$. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, ce que peut valoir $f(x)$.
3. Conclure en déterminant soigneusement toutes les fonctions vérifiant (E).

Exercice 2 : logique

1. Écrire la négation des assertions suivantes
   Remarque : ces assertions correspondent à des propriétés dont les noms sont donnés purement à titre informatif : surjective, continue, bornée, mais cela n'a aucune importance pour l'exercice demandé.

   (a) f est surjective de I vers J : $\forall y \in J, \exists x \in I, y = f(x)$
   (b) f est continue en $a \in I$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$
   (c) f est bornée sur I : $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$.

2. Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication
$$\forall (x,y) \in I^2, (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)$$

3. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes

   (a) La fonction f s'annule sur l'intervalle I.
   (b) La fonction f est la fonction nulle.
   (c) f n'est pas une fonction constante.

Exercice 3 : Système à paramètre

Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; on pourra distinguer différents cas selon la valeur du paramètre a. On précisera, toujours suivant les valeurs de a, la nature géométrique de l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} x & +2y & -z & = 1 \\ x & +2y & +az & = 2 \\ 2x & +ay & +2z & = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 : Sommes et produit.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} p+i \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+n \\ p+1 \end{pmatrix}$$

2. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Calculer
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{p-1} (i+j) \right).$$

Exercice 5 : Sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme double $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.

2. Montrer que $S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$.

3. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

4. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.