Corrigé du DS n°1.

Durée : 3 heures

Question de cours

Soit $n \in \mathbb{N}$, rappelez (sans démonstration) la valeur des quantités $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Énoncez la formule permettant de calculer $\sum_{k=1}^{n} k^3$, puis démontrez ce résultat (de la manière de votre choix).

Proche du cours

1. Résoudre l'équation $2x+3 = |x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Cas où $x+1 \geq 0$ i.e. $x \geq -1$ dans ce cas, x est solution si et seulement si $2x+3 = x+1$ ce qui revient à $x = -2$ puisque $-2 < -1$ cela n'est pas une solution
   Cas $x < -1$ dans ce cas x est solution si et seulement si $2x+3 = -x-1$ ce qui revient à $3x+4 = 0$ donc à $x = -\frac{4}{3}$ puisque $-\frac{4}{3} < 1$ cela donne bien une solution Conclusion $\mathcal{S} = \{-\frac{4}{3}\}$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

   Montrer que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^n + 3^n$

   Pour tout entier n on définit $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 2^n + 3^n$"
   Initialisation Pour $n = 0$ on a $2^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$ or $u_0 = 2$ donc on obtient $\mathcal{P}(0)$
   Pour $n = 1$ on a $2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$ or $u_1 = 5$ donc on obtient $\mathcal{P}(1)$
   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.

   Alors $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) = 5 \times 2 \times 2 + 5 \times 3 \times 3^n - 6 \times 2^n - 6 \times 3^n = (10-6) \times 2^n + (15-6) \times 3^n$ Comme $10 - 6 = 4 = 2^2$ et $15 - 6 = 9 = 3^2$ on obtient bien

$$u_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$$

   ce qui prouve $\mathcal{P}(n+2)$
   Conclusion on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 2^n + 3^n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n\,(n+1-1) = n^2$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3} \quad \text{et} \quad B_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

   On reconnaît un produit télescopique et donc $A_n = \frac{n+4}{3}$
   Pour le second calcul, on a

$$B_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right)$$

   donc

$$B_n = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) = \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

Exercice 1 : une équation fonctionnelle

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation :

$$(E) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

1. Un raisonnement par Analyse-Synthèse

2. Soit f une fonction vérifiant l'équation (E).

   (a) En prenant $x = y = 0$ on obtient $f(0)^2 - f(0) = 0$ i.e. $f(0)(f(0)-1) = 0$, ainsi les deux seules valeurs possibles pour $f(0)$ sont 0 et 1.

   (b) On suppose que $f(0) = 0$. En prenant $x = 0$ et $y = 1$ on obtient $0 \times f(1) - f(0) = 0 + 1$ i.e. $0 = 1$

   (c) On suppose que $f(0) \neq 0$. On a donc $f(0) = 1$ Pour tout réel x, on a alors en prenant $y = 0$, $f(x)f(0) - f(0) = x + 0$ i.e. $f(x) = x + 1$

3. Dans l'analyse, nous avons vu que si f est solution alors $f : x \mapsto x + 1$
   Synthèse avec $f : x \mapsto x + 1$ on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y$$

   ainsi cette fonction est bien solution de l'équation fonctionnelle.
   Conclusion l'unique fonction solution du problème est a fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$$

Exercice 2 : logique

1. (a) f est surjective de I vers J : $\forall y \in J, \exists x \in I, y = f(x)$ Négation : $\exists y \in J, \forall x \in I, y \neq f(x)$

   (b) f est continue en $a \in I$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$
   Négation : $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - a| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$

   (c) f est bornée sur I : $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$. Négation : $\forall M > 0, \exists x \in I, |f(x)| > M$

2. Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication

   $$\forall (x,y) \in I^2, (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)$$

   Négation : $f(x) = f(y)$ et $x \neq y$ Contraposée : $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ Réciproque : $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$

3. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes

   (a) La fonction f s'annule sur l'intervalle I : $\exists x \in I, f(x) = 0$

   (b) La fonction f est la fonction nulle. $\forall x \in I, f(x) = 0$

   (c) f n'est pas une fonction constante. $\exists (x,y) \in I^2 / f(x) \neq f(y)$. Remarque : il y a une autre possibilité qui est : $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in I / f(x) \neq I$

Exercice 3 : Système à paramètre

Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & =1 \\ x & +2y & +az & =2 \\ 2x & +ay & +2z & =3 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3-2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & =1 \\ & & (a+1)z & =1 \\ & (a-4)y & +4z & =1 \end{array}\right. \underset{}{\overset{}{\Longleftrightarrow}} L_2 \leftrightarrow L3 \left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & =1 \\ & (a-4)y & +4z & =1 \\ & & (a+1)z & =1 \end{array}\right.$$

Les valeurs $a=4$ et $a=-1$ sont les deux seules pour lesquelles le système n'est pas de Cramer
Cas général : $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$ Dans ce cas le système admet une unique solutoin car il équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2y+z = 1-\frac{2a-6}{(a+1)(a-4)}+\frac{a-4}{(a-4)(a+1)} = \frac{a^2-3a-4-2a+6+a-4}{a^2-3a-4} = \frac{a^2-4a-2}{a^2-3a-4} \\ y & = & \frac{1-\frac{4}{a+1}}{a-4} = \frac{a-3}{(a+1)(a-4)} \\ z & = & \frac{1}{a+1} \end{array}\right.$$

donc $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{a^2-4a-2}{a^2-3a-4}; \frac{a-3}{a^2-3a-4}; \frac{1}{a+1}\right)\right\}$
Cas $a=4$ Dans ce cas le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & =1 \\ & 0 & & =1 \\ & & (a+1)z & =1 \end{array}\right.$$

et n'a donc aucune solution puisque la deuxième ligne est une condition d'incompatibilité. Dans ce cas on a donc

$$\mathcal{S} = \varnothing$$

Cas $a=-1$ Dans ce cas le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & =1 \\ & (a-4)y & & =1 \\ & & 0 & =1 \end{array}\right.$$

et n'a donc aucune solution puisque la deuxième ligne est une condition d'incompatibilité. Dans ce cas encore

$$\mathcal{S} = \varnothing$$

Exercice 4 : Sommes et produit.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}(n) : \sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$ "
   Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part
   - $\left.\begin{array}{l} \text{- } \sum_{i=0}^{1-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p}{p} = 1 \\ \text{- D'autre part: } \binom{p+1}{p+1} = 1 \end{array}\right\}$ cela prouve $\mathcal{H}(1)$

   Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathscr{H}(n)$. O. a :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{p+i}{p} = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p}\right)}_{\underset{\mathscr{H}(n)}{\overset{D'apres}{\parallel}}} + \binom{p+n}{p}$$

$$= \overbrace{\binom{p+n}{p+1}} + \binom{p+n}{p} \underset{\text{Formule de Pascal}}{=} \binom{p+n+1}{p+1}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{H}(n)$ est vraie i.e

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$$

2. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{p-1}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\dots(i+p-1)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(i+p-1)!}{(i-1)!} = \sum_{i=1}^{n} p!\times\frac{(i+p-1)!}{(i-1)!p!}\\ &= p!\sum_{i=1}^{n}\binom{p+i-1}{p}) \underset{\substack{\text{En posant}\\ j:=i-1}}{=} p!\sum_{j=0}^{n-1}\binom{p+j}{p}\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{p-1}(i+j) = p!\times\binom{p+n}{p+1} = \frac{p!\times(p+n)!}{(p+1)!(n-1)!}$$

d'après la question 1, puis

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{p-1}(i+j) = \frac{1}{p+1}\times\frac{(p+n)!}{(n-1)!}$$

Exercice 5 : Sommes

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} 2^j\right) = \sum_{k=0}^{n} 2^k\frac{1-2^{n-k+1}}{1-2}$ (somme des $n-k+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 2^k.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k(2^{n-k+1}-1) = \sum_{k=0}^{n}(2^{n+1}-2^k) = \sum_{k=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} 2^k = (n+1)2^{n+1} - 2^0\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

soit $\boxed{S_n = n2^{n+1}+1}$

2. $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant n \\ k \leqslant j \leqslant n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant j \leqslant n \\ 0 \leqslant k \leqslant j \end{cases}$

d'où $S_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} 2^j = \sum_{j=0}^{n} 2^j\left(\sum_{k=0}^{j} 1\right)$ d'où $\boxed{S_n = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \sum_{j=k-1,j=0}^{n-1}(j+1)2^j = S_{n-1}$ donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n+1}$

4. $T_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1} = \sum_{i=1}^{n}(i2^{i+1}+1) = \sum_{i=1}^{n} i2^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2^2\sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} + n$ donc $\boxed{T_n = 4((n-1)2^n+1)+n}$