# D.M 1

**ex 1** 1) Soit $x \in \mathbb{R}$ alors :

$f$ est définie en $x \iff \left(e^x - 2 \neq 0 \text{ et } \frac{e^{2x}+5}{e^x-2} > 0\right)$

Puisque $e^{2x} + 5 > 0$, ceci revient exactement à

$e^x - 2 > 0$ i.e $x > \ln(2)$

Donc $\boxed{D_f = ]\ln(2) ; +\infty[}$

2) On a $\ln(3) > \ln(2)$ donc $\ln(3) \in D_f$ et

$$\boxed{f(\ln(3))} = \ln\left(\frac{e^{2\ln 3} + 5}{e^{\ln(3)} - 2}\right) = \ln\left(\frac{3^2+5}{3-2}\right) = \boxed{\ln(14)}$$

idem, $2\ln(3) \in D_f$ et

$$\boxed{f(2\ln(3))} = \ln\left(\frac{e^{4\ln(3)} + 5}{e^{2\ln(3)} - 2}\right) = \ln\left(\frac{3^4+5}{3^2-2}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{86}{7}\right)}$$

Puisque $\frac{86}{7} < 14$ et que $\ln \nearrow$ on a

$$\boxed{f(2\ln(3)) < f(\ln(3))}$$

3] Soit $x \in D_f$,

$$f(x) = \ln(2) \iff \frac{e^{2x}+5}{e^x-2} = 2$$

$$\iff \frac{X^2+5}{X-2} = 2 \quad (\text{avec } X = e^x)$$

$$\iff X^2+5 = 2(X-2)$$

$$\iff X^2-2X+9 = 0$$

$\Delta = 4-36 < 0$ donc cette équation n'a pas de solution réelle, i.e **$\ln(2)$ n'a pas d'antécédent par $f$.**

$$f(x) = 4\ln(2) \iff f(x) = \ln(2^4)$$

$$\iff \frac{e^{2x}+5}{e^x-2} = 16$$

$$\iff X^2+5 = 16(X-2) \quad \text{avec } X = e^x$$

$$\iff X^2-16X+37 = 0$$

$\Delta = 256 - 4\times 37 = 108 = 4\times 27 = 36\times 3$

Deux valeurs possibles pour $X_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{108}}{2} = 8 \pm 3\sqrt{3}$ ($\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$)

Ces deux valeurs étant positives, l'équation $e^x = X_1$ a exactement une solution : $\ln(8-\sqrt{3})$ idem.

l'équation $e^x = X_2$ donc $4\ln(2)$ a exactement 2 antécédents.

$\mathcal{S} = \{\ln(8-\sqrt{3}) ; \ln(8+\sqrt{3})\}$.

2

4] $\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2} = \dfrac{e^x\times(e^x+5e^{-x})}{e^x(1-2e^{-x})} = \dfrac{e^x+5e^{-x}}{1-2e^{-x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+5e^{-x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2e^{-x}) = 1$

donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2} = +\infty$

En composant avec ln on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right) = +\infty}$$

D'autre part, $e^{2\ln(2)}+5 = 4+5 = 9 > 0$

et $\lim\limits_{x\to\ln(2)^+} e^x-2 = 0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to\ln(2)^+}\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2} = +\infty$ (par quotient)

en composant avec ln on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to\ln(2)^+} f(x) = +\infty}.$$

5] $\forall x\in]\ln(2),+\infty[$ on a $f(x)-x = \ln\left(\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right)-x$

$$= \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right) - \ln(e^x)$$

$$= \ln\left(\frac{\left(\frac{e^{2x+5}}{e^x-2}\right)}{e^x}\right)$$

Ainsi $f(x) - x = \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^{2x}(e^x-2)}\right)$

$= \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^{2x}-2e^x}\right)$

Or $\frac{e^{2x}+5}{e^{2x}-2e^x} = \frac{e^{2x}\times(1+5e^{-2x})}{e^{2x}\times(1-2e^{-x})} = \frac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}}$

Le numérateur et le dénominateur converge vers 1 en $+\infty$ donc par quotient

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+5}{e^{2x}-2e^x} = 1$, en composant avec ln on obtient.

$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^{2x}-2e^x}\right) = \ln(1) = 0$ (par continuité de ln en 1)

ie $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0}$

de plus, on a $e^{2x}+5 > e^{2x}-2e^x$

donc $\frac{e^{2x}+5}{e^{2x}-2e^x} > 1$

puis $\ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^{2x}-2e^x}\right) > 0$

donc la courbe est au-dessus de son asymptote.

6] $f$ est dérivable sur son domaine de définition en tant que composée d'une fonction dérivable avec un quotient de fonctions dérivables.

On a $\forall x \in ]\ln(2); +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x-2) - e^x(e^{2x}+5)}{(e^x-2)^2} \Big/ \frac{e^{2x}+5}{e^x-2}$$

$$= \frac{e^x \times (2e^{2x} - 4e^x - e^{2x} - 5)}{(e^x-2)(e^{2x}+5)} = \frac{e^x(e^{2x} - 4e^x - 5)}{(e^x-2)(e^{2x}+5)}$$

en posant $X = e^x$ on a $e^{2x} - 4e^x - 5 = X^2 - 4X - 5$.

$\Delta = 16 - 4\times(-5) = 36$, il y a 2 racines : $\frac{4 \pm 6}{2} = -1$ et 5

Donc $X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$

Ainsi $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)(e^x-5)}{(e^x-2)(e^{2x}+5)}$

Puisque $x > \ln(2)$ on a $e^x > 0$, $e^x + 1 > 0$, $e^x - 2 > 0$ et $e^{2x} + 5 > 0$

Ainsi $f'(x)$ est du même signe que $e^x - 5$

i.e $f'(x) > 0 \iff x > \ln(5)$

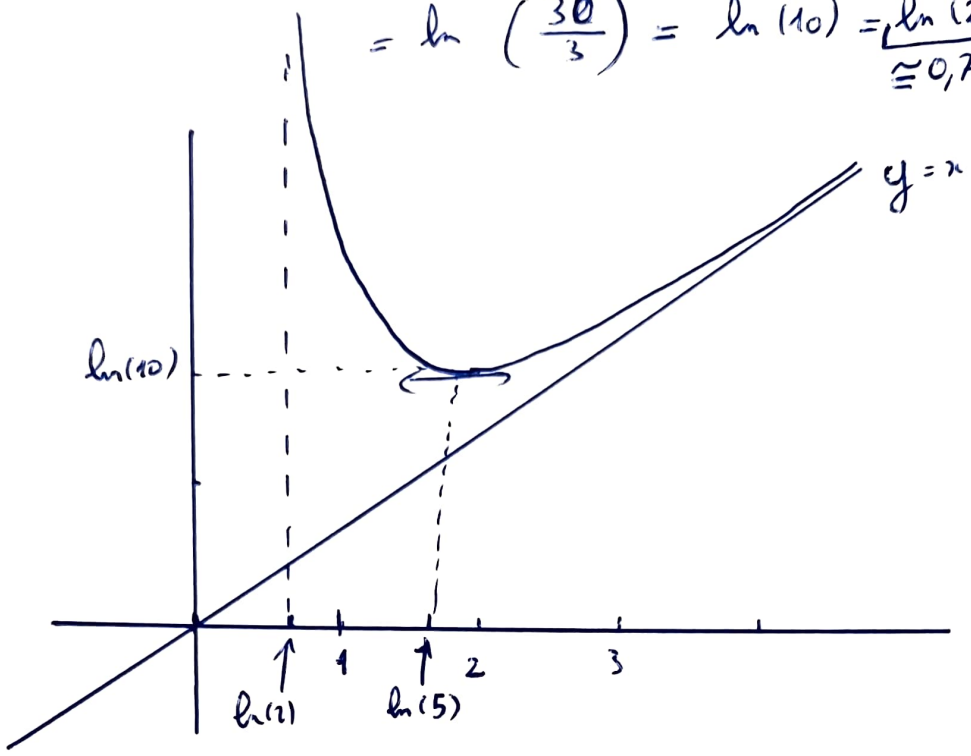
On a $e^{2x} + 5 \xrightarrow[x \to \ln(2)^+]{} 9$

$e^x - 2 \xrightarrow[x \to \ln(2)^+]{} 0^+$

donc $\ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right) \xrightarrow[x \to \ln(2)^+]{} +\infty$

| $x$ | $\ln(2)$ | $\ln(5)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ $0$ $+$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ $\ln(10)$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

On a $f(\ln(5)) = \ln\left(\frac{5^2+5}{5-2}\right) = \ln\left(\frac{30}{3}\right) = \ln(10) = \underbrace{\ln(2)}_{\cong 0,7} + \underbrace{\ln(5)}_{\cong 1,6}$




## Exercice 2

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ on a : g est définie en x ssi

$x^2 - x - 2 \neq 0$.

On a $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc il y a 2 valeurs interdites :

$\frac{1 \pm 3}{2}$ i.e $\underline{D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}}$.

2) Soit $x \in D_g$, $g(x) = 1 \iff \left(\frac{x+2}{x^2-x-2} = 1 \text{ ou } -1\right)$

$\iff (x+2 = x^2 - x - 2 \text{ ou } x+2 = -x^2 + x + 2)$

$\iff (x^2 - 2x - 4 = 0 \text{ ou } x^2 = 0)$

$\Delta = 4 + 16 = 20$ donc la 1ère équation a 2 solutions : $\frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

Ainsi, 1 a 3 antécédents : $1+\sqrt{5}$ ; $1-\sqrt{5}$ et 0.

- $g(x) = -1$ n'a aucune solution car $g \geq 0$

- $g(x) = 3 \iff \left(\frac{x+2}{x^2-x-2} = 3 \text{ ou } -3\right)$

$\iff (x+2 = 3x^2-3x-6) \text{ ou } (x+2 = -3x^2+3x+6)$

$\iff (3x^2-4x-8=0 \quad \text{ou} \quad 3x^2-2x-4=0)$

1ère équation : $\Delta = 16+12\times 8 = 16\times(1+6) = 16\times 7$.

2 solutions réelles : $\frac{4 \pm 4\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{3}$.

2e équation : $\Delta = 4+4\times 3\times 4 = 4\times 13$

2 solutions réelles : $\frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$.

Aucune de ces 4 valeurs n'est interdite, donc

$$g(x) = 3 \iff x \in \left\{ \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{3} ; \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3} \right\}$$

3] Résolvons $g(x) \geq 1 \iff |x+2| \geq |x^2-x-2|$

**Sur $]-\infty;-2]$** Ceci équivaut à

$$-x-2 \geq x^2-x-2$$

$$\iff 0 \geq x^2 : \text{ pas de solution. } \mathcal{S}_1 = \emptyset$$

**Sur $[-2;-1[$** ceci équivaut à

$$x+2 \geq x^2-x-2$$

$$\iff x^2-2x-4 \leq 0$$

$$\iff x \in [1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}] \cap [-2;-1[$$

Puisque $-2 < 1-\sqrt{5} < -1$ on a

$$\mathcal{S}_2 = [1-\sqrt{5};-1[$$

Sur $]-1;2[$ ceci équivaut à $x+2 \geq -x^2+x+2$

$$\iff x^2 \geq 0 \quad \text{qui est vrai sur } ]0;2[$$

$$\mathcal{S}_3 = ]0,2[$$

Sur $]2,+\infty[$, ceci équivaut à $x+2 \geq +x^2-x-2$

$$\iff x^2-2x-4 \leq 0$$

$$\iff x \in [1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}] \cap ]2;+\infty[$$

Puisque $1+\sqrt{5} > 2$ on a

$$\mathcal{S}_4 = ]2; 1+\sqrt{5}]$$

**Conclusion** $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 = [1-\sqrt{5};-1[ \cup ]0;2[ \cup ]2;1+\sqrt{5}]$

4) On a $g(x) = \left| \frac{1+\frac{2}{x}}{x-1-\frac{2}{x}} \right| \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

- Limites en $-1$

$\lim_{x \to -1^{\pm}} |x+2| = 1 > 0$

$\lim_{x \to -1^{\pm}} (x^2 - x + 2) = 0^+$

Donc $\boxed{\lim_{x \to -1^{\pm}} g(x) = +\infty}$

- Limites en $2$

$\lim_{x \to 2^{\pm}} |x+2| = 4 > 0$

$\lim_{x \to 2^{\pm}} |x^2 - x + 2| = 0^+$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 2^{\pm}} g(x) = +\infty}$.

5] $\forall x \in D_f$, on définit $\phi(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$

Alors $\phi$ est dérivable sur $D_f$ en tant que quotient de fonctions dérivables (et $x^2-x-2$ ne s'annule pas sur $D_f$)

et l'on a $\forall x \in D_f$,

$$\phi'(x) = \frac{(x^2-x-2)-(2x-1)(x+2)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{x^2-x-2-(2x^2+4x-x-2)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} = \boxed{\frac{-x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}}$$

On représente un tableau de signe pour $\phi$ et $\phi'$. Les valeurs à y faire figurer sont celles de 0 et -4 car $\phi'$ change de signe en ces valeurs, mais aussi celles de -2, -1 et 2 car il nous faut savoir le signe de $\phi$ pour savoir si $\phi' = g'$ (intervalles sur lesquels $\phi > 0$ et donc $\phi = g$) ou si $\phi' = -g'$ (intervalles sur lesquels $\phi < 0$ et donc $\phi = -g$)

Par ailleurs, la valeur absolue n'étant pas dérivable en 0, $g$ n'est pas dérivable en $-2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $\phi(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | ↗ | $\frac{1}{9}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | | ↘ $1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | | ↘ $0$ |

$$g(-4) = \left| \frac{-2}{16 + 4 - 2} \right| = \frac{1}{9}$$

$$g(0) = \left| \frac{2}{-2} \right| = 1$$

Le graphe de g possède 2 asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

Une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d'équation $y = 0$.

Un point anguleux : lorsque g s'annule en $-2$.

