TD 2 : Techniques fondamentales en calcul algébrique

Exercices classiques liés à la récurrence

Ex 1 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1, u_1 = 10$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + 3n + 8$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^{n+1} - \dfrac{(n+3)(n+2)}{2}$.

Ex 2* Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $f(2) = 2$ et $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $f(pq) = f(p)f(q)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

Ex 3 Calculer la dérivée n-ème des fonctions suivantes :
(a) $f : x \mapsto \sin(x)$ (b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{3x-2}$

Ex 4 Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, (1+x)^n \geqslant 1+nx$ (Formule de Bernoulli)
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geqslant 0, e^x \geqslant 1 + \dfrac{x^n}{n!}$

Calculs de sommes et de produits

Ex 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} i$, $\sum_{k=1}^{n} n$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k$, $\sum_{k=1}^{n} (\alpha + a_k)$
2. Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$ et $(*)$ $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$ Le dernier calcul correspond à $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\right)$. En fixant i, on remarque que $\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j)$ dans la première somme on a $j \leq i$ donc $\min(i,j) = j$, dans la seconde, c'est le contraire

Ex 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer les produits suivants : $\prod_{k=1}^{n} k$, $\prod_{k=1}^{n} i$, $\prod_{k=1}^{n} n$, $\prod_{k=1}^{n} \alpha a_k$, $\prod_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}$
2. Calculer les produits suivants : $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ l'écrire $\prod_{k=2}^{n}\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$ et repérer un produit télescopique, $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ l'écrire $\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$ et le "séparer" en 2 produits télescopiques et $(*)$ $\dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k}$ Pour le dernier produit, on s'aperçoit qu'il s'agit du produit des entiers impairs par le produit des entiers pairs. Pour calculer celui ci : il s'exprime comme le produit des $2k$, le facteur 2 étant répété n fois, en les regroupant on trouve 2^n et le produit des k vaut $n!$. Pour calculer le produit des impairs (au numérateur) l'astuce consiste à multiplier les 2 membres de la fraction par le produit des entiers pairs, ainsi, on obtiendra $(2n)!$ au numérateur

Ex 7 **Permutation de sommes**

1. Calculer $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}$ puis en déduire $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}$. Dans la première expression à calculer, on remarque qu'il s'agit de $\sum_{k=1}^{n} 2^k$. Lien entre les deux quantités : utiliser le résultat sur les permutations d'indice, ici avec la contrainte $1 \leq i \leq k \leq n$
2. $(*)$ Calculer $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p$ et enfin reconnaître une applicatoin de la formue du binôme de Newton.

Ex 8 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. Interpréter cette égalité à l'aide du triangle de Pascal. Fixer l'entier p dans un premier temps, faire une récurrence sur l'entier n

Ex 9* **Calcul de la somme** $\sum_{2k=0}^{n}\binom{n}{2k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Mettre $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ à l'aide de la formule du binôme en regroupant les termes par parité.
2. En déduire les sommes $\sum_{2k=0}^{n}\binom{n}{2k}$ et $\sum_{2k+1=0}^{n}\binom{n}{2k+1}$. En notant S et S' ces deux sommes, montrer que $S+S' = 2^n$ et $S-S' = 0$, on obtient ensuite $S = S' = 2^{n-1}$

Ex 10 **Calcul des sommes** $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ **et** $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

1. Exprimer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$. En déduire la valeur des deux sommes.
2. On pose $f(x) = (1+x)^n$. Exprimer f et ses dérivées sous forme de sommes, puis retrouver les deux valeurs précédentes.
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Ex 11* **Calcul de la somme** $S_p(n) = \sum_{j=0}^{n} j^p$

1. En prenant comme convention $0^0 = 1$, calculer que $S_0(n)$.
2. Montrer que $S_{p+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}S_k(n)$.
   On pourra effectuer une interversion de sommes et un décalage d'indice.
3. En déduire que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, (n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}S_k(n)$.
4. Retrouver ainsi les valeurs de $S_0(n), S_1(n), S_2(n)$ et $S_3(n)$.

Ex 12 Résoudre les systèmes suivants à l'aide du pivot de Gauss :

$$(S_1):\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x+3y+z=3 \\ x-y+z=2 \end{cases} \qquad (S_2):\begin{cases} 2x+3y-z+t=2 \\ 2x+3y+z=4 \\ 2x+3y+2z=3 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \qquad (S_3):\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+x_4+x_5=1 \\ x_1+3x_2-x_3+3x_4+2x_5=3 \\ x_1+3x_2-3x_3-x_4=2 \end{cases}$$

$$(S_4):\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases} \qquad (S_5):\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$$

Ex 13* Résoudre en fonction des paramètres les système suivants et préciser la nature géométrique de l'ensemble de ces solutions (lorsqu'elles existent):

$$(\Sigma_1):\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ mx-m^2y+mz=2m \\ mx+y-m^3z=1-m \end{cases} \quad \text{où } m\in\mathbb{R}$$

$(\Sigma_2):\begin{cases} ax+by+z=\alpha \\ x+aby+z=\beta \\ x+by+az=\gamma \end{cases}$ où $(a,b,\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^5$ Pour éviter d'avoir à traiter inutilement le cas $a=0$, on commence par permuter les lignes 1 et 3.