TD 1 Éléments de logique et de théorie des ensembles

Exercices de logique

Ex 1 Nier les phrases suivantes

1. Tous les habitants de Saint-Denis qui ont les yeux bleus aiment chanter et prendront leur retraite avant 50 ans.
2. Dans chaque écurie, tous les chevaux sont noirs.
3. Si tu es sur la plage alors tu vois la mer.

Ex 2 On considère la proposition P suivante : « Si le carreau est vert alors il est en marbre ». Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

1. $P \equiv$ « Pour que le carreau soit vert, il faut qu'il soit en marbre »
2. $P \equiv$ « Si le carreau n'est pas en marbre, alors il n'est pas vert »
3. $P \equiv$ « Pour que le carreau soit en marbre, il suffit qu'il soit vert »
4. $P \equiv$ « Si le carreau n'est pas vert , alors il n'est pas en marbre »
5. $P \equiv$ « Le carreau est en marbre et il n'est pas vert »

Ex 3 Pour chaque phrase choisir le(s) mot(s) qui rend(ent) l'assertion vraie.

1. Pour faire de la mousse au chocolat, il faut / il suffit (d') avoir du chocolat.
2. Les œufs sont une condition nécessaire / une condition suffisante pour faire de la mousse au chocolat.
3. Pour qu'un losange soit un carré, il faut / il suffit que ses diagonales soient de même longueur.
4. $x = 2$ est une condition nécessaire / une condition suffisante pour que $x^2 = 4$.

Ex 4 Que dire des assertions suivantes ?

1. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
2. $\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Manipulation des quantificateurs

Ex 5 Nier les assertions suivantes

1. (u_n) est une suite bornée : $\quad \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$
2. $\mathbb{R}$ est archimédien : $\quad \forall b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n \in \mathbb{N}^*, na > b$
3. f est croissante sur $\mathbb{R}$: $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
4. f est convexe sur I : $\quad \forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$: $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

Ex 6 On considère les assertions suivantes, écrire leur négation puis déterminer lesquelles sont vraies ou fausses.

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, ab \in [a, a+b]$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, ab \in [a; a+b]$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, xy = 1))$
4. Soient $\mathscr{D}(O;1)$ le disque unité et M un point d'affixe z. On a alors :
   $(|\text{Re}(z)| \leqslant 1 \text{ et } |\text{Im}(z)| \leqslant 1) \iff M \in \mathscr{D}(O;1)$

Ex 7 Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et leurs négations.

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
2. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
3. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
4. Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Théorie des ensembles

Ex 8 Soient A et B deux parties de E. Montrer les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$
2. $A = B \iff A \cup B = A \cap B$

Ex 9 Soient A, B, D trois sous-ensembles de E tels que : $A \cup B = B \cap D$. Comparer A, B et D.

Ex 10 Citer les affirmations vraies ou corriger leur syntaxe :

$\pi \subset \mathbb{R}$	$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$	$-3 \in \mathbb{Q}$
$M = (CD) \cap (AB)$	$\{1,2\} \cap 3 = \{\varnothing\}$	$\mathbb{N}^* \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$
$3 \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$	$\sqrt{2} \in \mathscr{P}(\mathbb{Q})$	$\mathbb{N} \subset \mathscr{P}(\mathbb{Z})$

Ex 11 Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(\{1\})$ et $(*)$ $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\}))$.Le premier ensemble continet deux éléments (qui sont des sous parties de $\{1\}$) et le deuxième ensemble contient 4 éléments (qui sont des sous-parties de $\mathscr{P}(\{1\})$)

Ex 12 Soient A et B deux sous-ensembles de E.
On appelle **différence symétrique** de A et B l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B sans appartenir à la fois aux deux ensembles. On le note $A\Delta B$.

1. Exprimer $A\Delta B$ à l'aide de $A \cup B$ et $A \cap B$. $A\Delta B = A \bigcup B \setminus (A \bigcap B)$
2. En déduire que Δ est commutative et associative. Montrer la commutativité signifie prouver que $A\Delta B = B\Delta A$ Montrer l'associativité signifie montrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ ce qui se fait par double inclusion : on considère un élément x du premier ensemble, on distingue les cas de figures possibles, et on constante que dans tous les cas il est dans le deuxième ensemble. Réciproquement, on montre que tout élément du second ensemble fait aussi partie du premier.

Ex 13 On considère les deux propositions : $P(x)$: « $x^2 \leqslant 1$ », $Q(x)$: « $x \leqslant 1$ » et $R(x)$: « $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ».
Soient E, F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par :

$$E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, P(x)\}, \quad F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q(x)\} \quad \text{et} \quad G = \{x \in \mathbb{R} \,|\, R(x)\}$$

Dresser un tableau résumant la correspondance entre le vocabulaire ensembliste et les notions de logique sur les propositions suivantes :

$$\text{non } P \qquad E \cap F \qquad F \backslash E \qquad Q \text{ ou } P \qquad P \Rightarrow Q \qquad E \Delta F \qquad E = G$$

Ex 14 Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{3,4\}$ deux parties de $E = \{1,2,3,4,5\}$. Déterminer les ensembles $A \times B$, $B \times A$, $\overline{A} \times B$ et $\overline{A \times B}$.