

TD 26 : Séries numériques

Théorèmes de comparaison

Ex 1 Déterminer la nature des séries suivantes

$$1) \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \quad 2) \sum \frac{n^2}{n^3+n} \quad 3) \sum \frac{1}{\ln n}$$

$$4) \sum \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \quad 5) \sum \frac{2n}{2^n+n} \quad \sum \operatorname{Arctan} \left(\frac{n+1}{n-1} \right) - \frac{\pi}{4}$$

$$7) \sum e^{-\sqrt{n}} \quad 8) \sum \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}} \quad 9) \sum \frac{1}{n^3 \ln(n)}$$

$$10) \sum \frac{n!}{n^n} \quad 11) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad 12) \sum \frac{1}{(\ln n)^n}$$

1) Équivalent en $+\infty$ 2) Équivalent en $+\infty$ 3) $n \ln(n) \rightarrow +\infty$ 4) Équivalent en $+\infty$ 5) $n^2 u_n \rightarrow 0$ 6) Équivalent en $+\infty$: après DL en 1 de $\arctan$ 7) $o(1/n^2)$ 8) $u_n > \frac{1}{n}$ 12) $> 1/n$

Ex 2 Déterminer la nature des séries suivantes

$$1) \sum \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln n} \quad 2) \sum \frac{a^n}{1+a^{2n}} \quad \text{avec } a > 0 \quad 3) \sum \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$$

$$4) \sum \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{n}} - (\operatorname{Arctan} n)^{\frac{3}{n}} \quad 5) \sum \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 \quad 6) \sum e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}}$$

$$7) \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \quad 8) \sum \frac{\sin n}{n(n+1)} \quad 9) \sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1+\operatorname{ch}^2(x)} dx$$

$$10) \sum \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \quad 11) \sum (-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad 12) \sum \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

1) Divergence grossière 2) Trois cas : $a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$ 3) Équivalent en $+\infty$ 4) Utiliser $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2}$ et un DL de $\arctan$ en 0 5) Utiliser a forme exponentielle puis faire un DL 7) forme exponentiell puis DL 8) convergence absolue : $|u_n| \leq 1/n^2$ 9) majorer I_n par $\int_0^{1/n} x dx$ 10) même idée mais ici en valeur absolue 11) équivalent 12) équivalent de $|u_n|$ et convergence absolue

Comparaison série/intégrale

Ex 3

1. Montrer la divergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n}$

(a) à l'aide des théorèmes de comparaison.

(b) de la comparaison série/intégrale.

2. Donner un développement asymptotique à deux termes de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n}$.

3. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$ où γ est la constante d'Euler.

Ex 4 Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ puis un équivalent des sommes partielles.

Ex 5 Fonction ζ de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction ζ par : $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Pour quelles valeurs de α , ζ est-elle définie ?
2. A l'aide de la comparaison série/intégrale, montrer que $\zeta(\alpha) \underset{1+}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}$.
3. Si on note S_n et R_n respectivement les suites des sommes partielles et des restes d'ordre n de la série associée à ζ , étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{R_n}{S_n}$.

Calculs de sommes**Ex 6 Étude de séries alternées**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant l'identité $\frac{1}{\alpha n + 1} = \int_0^1 t^{\alpha n} dt$, montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$ converge et déterminer sa somme sous forme d'une intégrale. [Pour des sommes finies on peut permuter \$\sum\$ et \$\int\$](#)
2. En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Ex 7 Montrer la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes [Pour le calcul : effectuer un DSE et faire un calcul explicite de la somme partielle \$S_n\$ pour 1\) 2\) et 3\)](#)

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} \quad 2) \quad \sum \frac{1}{n(n+4)} \quad 3) \quad \sum \frac{1}{n(2n+1)} \\ 4) \quad & \sum \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad 5) \quad \sum (n+1)3^{-n} \quad 6) \quad \sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2 + n + 1} \end{aligned}$$

[Pour la 4\) \$\ln\(1 - 1/n^2\) = \ln\left\(\frac{n^2-1}{n^2}\right\) = \ln\(n+1\) + \ln\(n-1\) - 2\ln\(n\)\$ 5\) dériver \$S_n\(x\) = \frac{1-x^n}{1-x}\$ puis évaluer en \$\frac{1}{3}\$](#)
[Pour la 6\) on pourra calculer \$\tan\(\operatorname{Arctan}\(n+1\) - \operatorname{Arctan}\(n\)\)\$ et profiter du résultat](#)

Ex 8 Pour tout entier naturel n non nul, on note $v_2(n)$ le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n .

1. Montrer que $v_2(n) \leq \log_2(n) + 1$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{v_2(n)}{n(n+1)}$ converge.
2. Justifier que $v_2(2n) = v_2(n)$ et $v_2(2n+1) = v_2(n) + 1$, puis calculer la somme de la série.

Lien suite/série

Ex 9 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour la suite (u_n) soit convergente avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \alpha \ln(n)$$

2. Exprimer alors sa limite en fonction de la constante d'Euler γ .

Ex 10 Déterminer la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} - \ln(\ln(n))$.

Exercices théoriques

Ex 11

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que la série $\sum \frac{P(n)}{n!}$ est convergente. On notera $S(P)$ sa somme.
2. Calculer $S(X), S(X(X-1)), S(X^2)$ et $S(X^3)$.

Ex 12 Étudier la nature de la série $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont des polynômes à coefficients réels.

Ex 13 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On considère la série de terme général $u_n = (n^4 + n^2)^{\frac{1}{4}} - P(n)^{\frac{1}{3}}$. Déterminer P pour que la série $\sum u_n$ converge.

Ex 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Établir que l'équation $x^n + nx - 1 = 0$ admet une unique solution, notée x_n , sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que (x_n) converge vers 0.
3. Étudier, suivant α , la nature de la série de terme général x_n^α .

Ex 15 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 > \sqrt{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (2 - u_n)$. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Ex 16 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

Déterminer la nature des séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Familles sommables

Ex 17 Permutation des sommes

Soit $(a_p)_{p \geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n, p) \in I$, on pose $u_{n,p} = \frac{p}{n(n+1)} a_p$ si $p \leq n$, $u_{n,p} = 0$ sinon. Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Ex 18 Somme double

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$. Utiliser le théorème de Fubini (version positive) : exprimer la somme comme une double somme. On identifiera une somme télescopique

Ex 19 Exemples de familles non sommables

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

Ex 20 Somme avec paramètre

On pose, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$.

Ex 21 Produit de Cauchy

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.