

Rinat

Gabriel

Maxime

Becher

MPSi

Exercice 7 :

$$1) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$$

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n^4 + n^2} = \frac{1}{n^3 + n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3} \quad \checkmark$$

Donc $\sum u_n$ a la même nature que

~~Gn retrouve~~ $\sum \frac{1}{n^3}$ une somme de Riemann ou $\alpha = 3$ donc $\alpha > 1$ ✓

Donc $\sum \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$ converge. ✓

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{n}{n^4 + 2n^2 + 1 - n^2} = \frac{n}{(n^2 + 1)^2 - n^2} = \frac{n}{(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)} \quad \checkmark$$

Gn fait une décomposition en éléments simples :

$$\frac{n}{(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)} = \frac{A}{n^2 + n + 1} + \frac{B}{n^2 - n + 1}$$

Gn trouve $A = \frac{-1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$ d'où

$$\frac{n}{(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{n^2 + n + 1} + \frac{1}{n^2 - n + 1} \right) \quad \checkmark$$

Gn pose $V_n = \frac{1}{n^2 - n + 1}$. Gn calcule V_{n+1} :

$$V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 - n - 1 + 1} = \frac{1}{n^2 + 2n + 1 - n} = \frac{1}{n^2 + n + 1} \quad \checkmark$$

$$\text{Donc } \frac{n}{(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)} = \frac{1}{2} (V_n - V_{n+1}) \quad \checkmark$$

$$\text{Donc } \sum \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \sum \frac{1}{2} (V_n - V_{n+1})$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} (V_k - V_{k+1})$$

$$= \frac{1}{2} (V_0 - V_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0^2 - 0 + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = 0$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+4)}$$

$$\frac{1}{n(n+4)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$$

donc $\sum u_n$ a la même nature que

~~On retrouve~~ $\sum \frac{1}{n^2}$ une somme de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

Donc $\sum \frac{1}{n(n+4)}$ converge

On fait une décomposition en éléments simples: $\frac{1}{n(n+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{n} + \frac{\frac{-1}{4}}{n+4}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4} \right) = \frac{1}{4} \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{n+4} \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{n+4} \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=n+1}^{n+4} \frac{1}{k} \right)$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 0 \right) = \frac{1}{4} \times \frac{25}{12} = \frac{25}{48}$$

4) $\sum \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ En appliquant avec $\frac{-1}{n^2}$ on a $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$ ✓

Σ n a_n convergente

~~On retrouve~~ $\sum \frac{1}{n^2}$ une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge.

$$G_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}\right)$$

$$\text{dann } \sum_{k=1}^n \ln k = \sum_{k=1}^n \ln(k-1) + \ln(k-1) - \ln(k) + \ln(k)$$

$$-\sum_{k=0}^n \ln(k+1) - \ln(A) - (\ln(k) - \ln(A_{k-1}))$$

On pose $U_n = \ln(n) - \ln(n-1)$ donc on a $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n \cancel{U_k} = U_n$

$$\begin{aligned} \text{Gm a } \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \sum_{k=2}^n (\ln v_{k+1} - \ln v_k) = v_{n+1} - v_2 \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2) \\ &= \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln(2) \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = \boxed{-\ln(2)}$$

6) $\sum \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$

$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. En appliquant avec $\frac{1}{n^2+n+1}$ on obtient

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \quad \checkmark$$

La série
est de même

~~On retrouve $\sum \frac{1}{n^2}$ une~~ série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série converge
nature que

$$\tan(\arctan(n+1) - \arctan(n)) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)\right)$$

$$= \frac{\tan(\arctan(n+1)) - \tan(\arctan(n))}{1 + \tan(\arctan(n+1))\tan(\arctan(n))}$$

$$= \frac{n+1-n}{1+(n+1)n} = \frac{1}{n^2+n+1} \quad \checkmark$$

de plus $\arctan(n+1) - \arctan(n) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
~~Quand $n \rightarrow +\infty$, $\tan(\arctan(n))$~~

Donc

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

↓
Les sommes partielles
deviennent donc des sommes
téléscopiques qui
se calculent.